

СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

Расчет трехслойной цилиндрической оболочки с учетом ползучести

УДК 624.04

Чепурненко Антон Сергеевич

Канд. техн. наук, доцент кафедры «Сопrotивление материалов» ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону); e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Языев Батыр Меретович

Д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Сопrotивление материалов» ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону); e-mail: ps62@yandex.ru

Лапина Анастасия Павловна

Ассистент кафедры «Строительство уникальных зданий и сооружений» ФГБОУ ВО «Донской государственный технический университет» (г. Ростов-на-Дону); e-mail: anastasiapina7@gmail.com

Статья получена: 12.11.2018. Рассмотрена: 15.11.2018. Одобрена: 21.11.2018. Опубликовано онлайн: 26.12.2018. ©РИОР

Аннотация. В статье приводится вывод разрешающих уравнений для расчета трехслойных цилиндрических оболочек при осесимметричном нагружении с учетом ползучести. Задача сводится к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Решение выполняется численно при помощи метода конечных разностей в сочетании с методом Эйлера.

Ключевые слова: трехслойные оболочки, ползучесть, метод конечных разностей, деформации поперечного сдвига.

Трехслойные конструкции в виде пластин и оболочек находят широкое применение в различных отраслях, включая строительство, кораблестроение, авиастроение и т.д. Такие конструкции сочетают в себе малый вес и высокую

жесткость. В качестве среднего слоя трехслойных конструкций широко используются полимерные материалы, для которых помимо упругих свойств характерна явно выраженная реология, поэтому для их расчета необходимо подключать аппарат теории ползучести.

Рассмотрим трехслойную цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием гидростатического давления (рис. 1).

Геометрические уравнения получим из общих уравнений Коши в цилиндрических координатах, имеющих вид [1]:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}; \epsilon_r = \frac{\partial w}{\partial r}; \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}; \gamma_{\theta r} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \gamma_{rx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial r}. \end{aligned} \quad (1)$$

CALCULATION OF A THREE-LAYER CYLINDRICAL SHELL TAKING THE CREEP INTO ACCOUNT

Chepurnenko Anton

Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department "Strength of materials", Don State Technical University, Rostov-on-Don; e-mail: anton_chepurnenk@mail.ru

Yazyev Batur

Doctor of Technical Sciences, Professor, Department "Strength of materials", Don State Technical University, Rostov-on-Don; e-mail: ps62@yandex.ru

Lapina Anastasia

Assistant of the Department "Construction of Unique Buildings

and Structures", Don State Technical University, Rostov-on-Don; e-mail: anastasiapina7@gmail.com

Manuscript received: 12.11.2018. **Revised:** 15.11.2018. **Accepted:** 21.11.2018. **Published online:** 26.12.2018. ©РИОР

Abstract. The article presents the derivation of the resolving equations for the calculation of three-layer cylindrical shells under axisymmetric loading, taking into account creep. The problem is reduced to a system of two ordinary differential equations. The solution is performed numerically using the finite difference method in combination with the Euler method.

Keywords: three-layer shells, creep, finite difference method, transverse shear deformations.

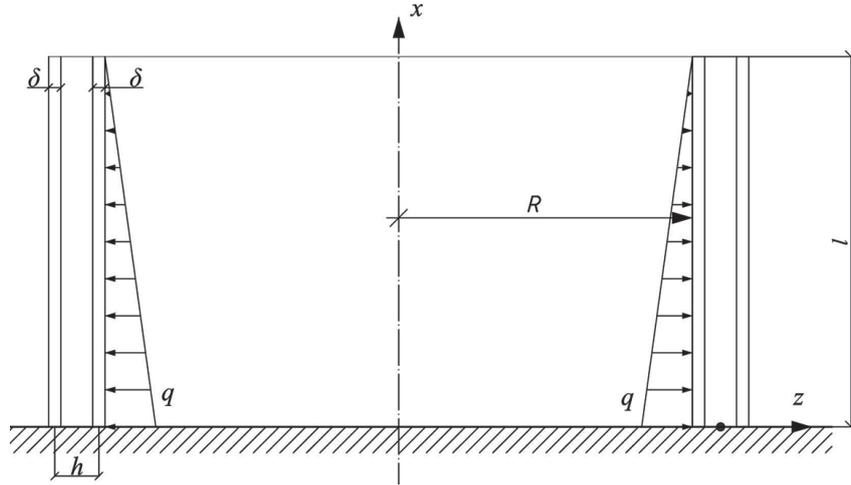


Рис. 1. Осесимметрично нагруженная трехслойная цилиндрическая оболочка

Для получения геометрических уравнений цилиндрической оболочки в (1) следует положить $r = R + z$ и учесть, что $z \ll R$. Деформации обшивок при этом примут вид:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{B(H)} &= \frac{\partial u^{B(H)}}{\partial x}; \epsilon_\theta^{B(H)} = \frac{1}{R} \frac{\partial v^{B(H)}}{\partial \theta} + \frac{w}{R}; \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \\ \gamma_{x\theta}^{B(H)} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u^{B(H)}}{\partial \theta} + \frac{\partial v^{B(H)}}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2)$$

Деформации сдвига среднего слоя запишутся в виде:

$$\gamma_{\theta z}^c = \frac{\partial v^c}{\partial z} - \frac{v^c}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \theta}; \quad \gamma_{zx}^c = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u^c}{\partial z}. \quad (3)$$

Для перемещений u среднего слоя примем линейное распределение по толщине:

$$u^c = \frac{u^B + u^H}{2} + \frac{u^H - u^B}{h} z = u + \alpha z. \quad (4)$$

Перемещения v при осесимметричном нагружении отсутствуют. Деформации сдвига заполнителя из (3) и (4) запишутся в виде:

$$\gamma_{zx}^c = \alpha + \frac{dw}{dx}. \quad (5)$$

Касательные напряжения в заполнителе с учетом ползучести определяются следующим образом:

$$\tau_{zx}^c = G_3 (\gamma_{zx}^c - \gamma^*) = G_3 \left(\alpha + \frac{dw}{dx} - \gamma^* \right), \quad (6)$$

где γ^* — деформации ползучести среднего слоя, G_3 — деформации сдвига заполнителя.

Деформации обшивок при осесимметричном нагружении запишутся в виде:

$$\epsilon_x^{B(H)} = \frac{du^{B(H)}}{dx}; \quad \epsilon_\theta^{B(H)} = \frac{w}{R}. \quad (7)$$

Принимая гипотезу о равномерном распределении касательных напряжений по толщине заполнителя, поперечную силу запишем следующим образом:

$$Q_x = \tau_{zx}^c h = G_3 h \left(\alpha + \frac{dw}{dx} - \gamma^* \right). \quad (8)$$

Связь между напряжениями и деформациями для обшивок запишется в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x^{B(H)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x^{B(H)} + \nu \epsilon_\theta^{B(H)}); \\ \sigma_\theta^{B(H)} &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta^{B(H)} + \nu \epsilon_x^{B(H)}). \end{aligned} \quad (9)$$

Принимая, что изгибающий момент M_x полностью воспринимается обшивками, представим его в виде:

$$\begin{aligned} M_x &= \delta (\sigma_x^H - \sigma_x^B) \frac{h}{2} = \\ &= \frac{E \delta h}{2(1-\nu^2)} (\epsilon_x^H - \epsilon_x^B + \nu (\epsilon_\theta^H - \epsilon_\theta^B)) = D \frac{d\alpha}{dx}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $D = \frac{E \delta h^2}{2(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость трехслойной оболочки.

Осевые усилия N_x и N_θ также полностью воспринимаются обшивками:

$$N_x = (\sigma_x^B + \sigma_x^H) \delta = \frac{E\delta}{1-\nu^2} (\epsilon_x^B + \nu\epsilon_\theta^B + \epsilon_x^H + \nu\epsilon_\theta^H) = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(\frac{d(u^B + u^H)}{dx} + 2\nu \frac{w}{R} \right). \quad (11)$$

$$N_\theta = \frac{E\delta}{1-\nu^2} (\epsilon_\theta^B + \nu\epsilon_x^B + \epsilon_\theta^H + \nu\epsilon_x^H) = \frac{E\delta}{1-\nu^2} \left(2\frac{w}{R} + \nu \frac{d(u^H + u^B)}{dx} \right). \quad (12)$$

Приравнявая усилие N_x к нулю и выражая величину $\frac{d(u^B + u^H)}{dx}$ через прогиб, получим следующую формулу для N_θ :

$$N_\theta = \frac{2E\delta w}{R}. \quad (13)$$

Уравнения равновесия при осесимметричном нагружении запишутся в виде [1]:

$$\frac{dM_x}{dx} = Q_x; \quad \frac{dQ_x}{dx} - \frac{N_\theta}{R} + q = 0. \quad (14)$$

Нагрузка q в случае действия гидростатического давления определяется по формуле:

$$q = \gamma(l - x), \quad (15)$$

где γ — удельный вес жидкости.

Подставляя (10) и (8) в первое уравнение равновесия в (14), получим:

$$D \frac{d^2\alpha}{dx^2} = G_3 h \left(\alpha + \frac{dw}{dx} - \gamma^* \right). \quad (16)$$

Подставив (8) и (13) во второе уравнение равновесия в (14), получим:

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d\alpha}{dx} - \frac{d\gamma^*}{dx} - \frac{1}{G_3 h} \frac{2E\delta w}{R^2} + \frac{q}{G_3 h} = 0. \quad (17)$$

Таким образом, задача расчета трехслойной цилиндрической оболочки при осесимметричном нагружении свелась к системе из двух дифференциальных уравнений (16) и (17) относительно функций α и w .

Для жестко защемленной в основании оболочки граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0: \alpha = 0, w = 0; \\ \text{при } x = l: M_x = 0 \rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = 0, \\ Q_x = 0 \rightarrow \alpha + \frac{dw}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Решение системы уравнений (16) и (17) может быть выполнено численно методом конечных разностей в сочетании с методом Эйлера для определения деформаций ползучести [2].

Был выполнен расчет оболочки с пенополиуретановым наполнителем при следующих исходных данных: $l = 3$ м, $R = 2$ м, $G = 4,85$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $h = 8$ см, $\gamma = 10$ кН/м³, $\delta = 1$ мм. В качестве закона ползучести использовалось нелинейное уравнение Максвелла — Гуревича, имеющее вид [3]:

$$\frac{\partial \epsilon_{zx}^*}{\partial t} = \left(\frac{3}{2} \tau_{zx} - E_\infty \epsilon_{zx}^* \right) \frac{1}{\eta^*}, \quad (19)$$

где $\epsilon_{zx}^* = \frac{1}{2} \gamma^*$, E_∞ — модуль высокоэластичности, η^* — релаксационная вязкость, которая нелинейно зависит от напряжения:

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp \left(\frac{|f^*|}{m^*} \right), \quad (20)$$

где η_0^* — начальная релаксационная вязкость, m^* — модуль скорости, $f^* = \frac{3}{2} \tau_{zx} - E_\infty \epsilon_{zx}^*$ — функция напряжений.

Реологические параметры пенополиуретана [4]: $E_\infty = 27,38$ МПа, $\eta_0^* = 1,43 \cdot 10^4$ МПа · ч, $m^* = 0,0218$ МПа.

На рис. 2 приведен полученный в результате расчета график изменения максимальной величины прогиба w . Из представленного графика видно, что ползучесть среднего слоя не оказывает заметного влияния на перемещения оболочки. Аналогичные результаты были получены автором ранее в работе [5] для пологих трехслойных оболочек.

Из рис. 3, показывающего изменение во времени максимальных касательных напря-

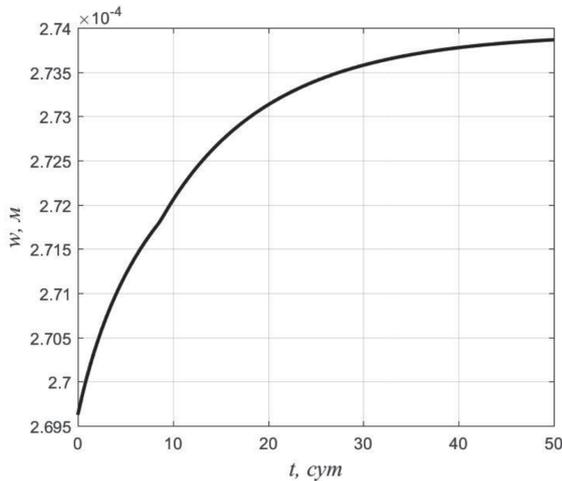


Рис. 2. Изменение во времени максимальной величины прогиба оболочки

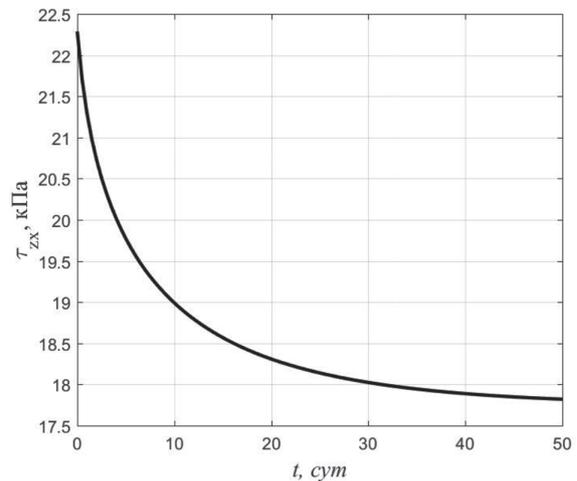


Рис. 3. Изменение во времени наибольших касательных напряжений в заполнителе

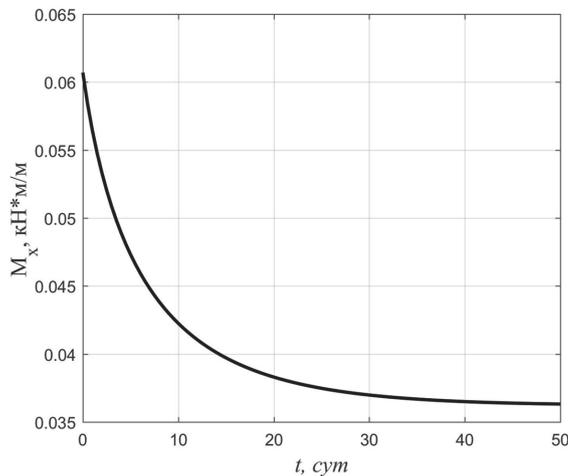


Рис. 4. Изменение во времени максимальной величины изгибающего момента

жений в заполнителе, видно, что в среднем слое происходит релаксация напряжений. Изгибающие моменты M_x также убывают во времени, что демонстрирует рис. 4. Поскольку кольцевая сила пропорциональна прогибу w ,

то она во времени постоянна. Таким образом, в целом ползучесть среднего слоя положительно сказывается на напряженно-деформированном состоянии рассматриваемой конструкции.

Литература

1. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности [Текст] / В.И. Самуль. — М.: Высшая школа, 1982. — 264 с.
2. Литвинов С.В. Плоская деформация неоднородных многослойных цилиндров с учетом нелинейной ползучести [Текст] / С.В. Литвинов, С.Б. Языев // Вестник МГСУ. — 2010. — № 1. — С. 128–132.
3. Литвинов С.В. Устойчивость полимерных стержней при различных вариантах закрепления [Текст] / С.В. Литвинов, Е.С. Клименко, И.И. Кулинич, С.Б. Языев // Вестник МГСУ. — 2011. — № 2-2. С. 153–157.
4. Yazyev B.M. Calculation of Three-Layer Panels with Polyurethane Foam Filler Taking into Account the Rheological Properties of the Middle Layer / B.M. Yazyev, A.S. Cherpurnenko, A.A. Savchenko // Materials Science Forum. 2018. Vol. 935. Pp. 144–149.
5. Андреев В.И. Расчет трехслойной полой оболочки с учетом ползучести среднего слоя [Текст] / В.И. Андреев, Б.М. Языев, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов // Вестник МГСУ. — 2015. — № 7. — С. 17–24.

References

1. Samul' V.I. *Osnovy teorii uprugosti i plastichnosti* [Fundamentals of the theory of elasticity and plasticity]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 1982. 264 p.
2. Litvinov S.V. Ploskaya deformatsiya neodnorodnykh mnogosloynnykh tsilindrov s uchetom nelineynoy polzuchesti [Plane deformation of inhomogeneous multilayer cylinders with regard to nonlinear creep]. *Vestnik MGSU* [Bulletin MGSU]. 2010, I. 1, pp. 128–132.
3. Litvinov S.V. Ustoychivost' polimernykh sterzhney pri razlichnykh variantakh zakrepleniya [Stability of polymer rods with different types of fastening]. *Vestnik MGSU* [Bulletin MGSU]. 2011, I. 2-2, pp. 153–157.
4. Yazyev B.M., Chepurnenko A.S., Savchenko A.A. Calculation of Three-Layer Panels with Polyurethane Foam Filler Taking into Account the Rheological Properties of the Middle Layer // *Materials Science Forum*. 2018. Vol. 935. Pp. 144–149.
5. Andreev V.I. Raschet trekhslonnoy plogoy obolochki s uchetom polzuchesti srednego sloya [Calculation of a three-layer flat shell taking into account the creep of the middle layer]. *Vestnik MGSU* [Bulletin MGSU]. 2015, I. 7, pp. 17–24.