Construction and Architecture (2019) Vol. 7. Issue 1 (22): 61–65
При цитировании этой статьи ссылка на DOI обязательна DOI 10.29039/article_5ca75fa36ed9d2.81160903

Алгоритм поиска базового критерия при проектировании сложных технических систем

УДК 518-90

Белоусов Вадим Евгеньевич
Канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой систем управления и информационных технологий в строительстве, ФГБОУ ВО «Воронежский государственный технический университет» (г. Воронеж); e-mail: belousov@vgasu.vrn.ru

Маилян Александр Левонович
e-mail: mailyam_a@sroufo.ru

Статья получена: 15.12.2018. Рассмотрена: 18.12.2018. Одобрена: 25.12.2018. Опубликована онлайн: 26.03.2019. ©РИОР

Аннотация. В данной статье рассматривается модель анализа многокритериальной задачи, позволяющая существенно снизить проблемы, возникающие при проектировании сложных технических систем в случаях, когда требуется существенно снизить размерность векторного критерия в случае его избыточности или показать, что такое сокращение невозможно.

Ключевые слова: ганализ, модель, критерий, проектирование, проблема, система.

Введение

Многие задачи оптимального проектирование сложных технических систем имеют многокритериальную основу. Причем в качестве критериев, как правило, берутся технические характеристики системы, а стратегии (альтернативы) представляют собой варианты ее проектов, задаваемые в виде наборов значений конструктивных параметров. Поскольку многокритериальные задачи проектирования сложных систем имеют большую размерность пространства стратегий и значительного времени расчета характеристик, их решение становится довольно затруднительным.

Другая особенность заключается в необходимости повторного решения многокритериальных задач с теми же критериями, но измененными множествами стратегий в связи с возможными в ходе проектирования изменениями конструктивных и функциональных ограничений, определяющих техническую систему [1; 2].

Постановка задачи

В многокритериальных задачах «качество» (или «полезность», «ценность», «эффективность» и т.п.) объектов оценивается с помощью критериев $K_1, K_2, ..., K_m (m \geq 2)$. Под критерием K_i понимается функция, отображающая множество объектов Q в некоторое, содержащее не менее двух точек, подмножество X_i числовой прямой *Re*. Это множество называют шкалой *i*-го критерия, а его элементы — шкальными оценками.

Критерии K_i образуют векторный критерий $K = (K_1, ..., K_m)$, отображающий множество Q во множество $\chi = X_1 \times X_2 \times ... \times X_m$ векторов, ком-

ALGORITHM OF SEARCH OF BASIC CRITERION AT DESIGN OF DIFFICULT TECHNICAL SYSTEMS
Vadim Belousov
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Head of the Department of Management Systems and Information Technologies in Construction, Voronezh State Technical University, Voronez; e-mail: belousov@vgasu.vrn.ru
Alexander Mailyan
e-mail: mailyam_a@sroufo.ru

Manuscript received: 15.12.2018. **Revised**: 18.12.2018. **Accepted**: 25.12.2018. **Published online:** 26.03.2019. ©RIOR
Abstract. In this article, the model of the analysis of a multicriteria task allowing to lower significantly the problems arising at design of difficult technical systems in cases when it is required to reduce significantly dimension of vector criterion in case of its redundancy or to show is considered that such reduction is impossible.
Keywords: analysis, model, criterion, design, problem, system.

понентами которых являются шкальные оценки. В общем случае не для всякого вектора x из χ может существовать соответствующий объект a, т.е. такой, что $K(a) = x$. Однако для анализа задачи и получения необходимой информации с целью ее решения удобно оперировать векторами из χ, которые не обязательно соответствуют реальным объектам (т.е. из Q), но могут рассматриваться как характеристики некоторых гипотетических объектов. Такие векторы будем называть векторными оценками. Множество всех векторных оценок обозначим через X, поскольку векторные комбинации шкальных оценок могут оказаться недопустимыми. Так как содержащие их векторы будут лишены смысла наборами чисел, то включение $X \subset \chi$, вообще говоря, строгое.

При решении задачи на основании полученной информации во множестве векторных оценок X строятся бинарные отношения предпочтения и безразличия, которые затем наряду с дополнительными гипотезами и принципами (например, принципом наибольшего гарантированного результата, применяемым при наличии неопределенных факторов) используются для построения отношения предпочтения во множестве стратегий U и выделения оптимальной стратегии [2; 3]. В дальнейшем отношения строгого предпочтения, безразличия, нестрогого предпочтения и несравнимости будут обозначаться соответственно буквами P, I, R и N, которые при необходимости будут снабжаться теми или иными индексами (верхними или нижними).

Для любых двух векторных оценок x и возможен один и только один из следующих случаев:

- xPy (x предпочтительнее, чем y);
- yPx;
- (x и y одинаковы по предпочтительности, т.е. безразлично, какую из этих двух векторных оценок выбрать в качестве лучшей);
- (x и y несравнимы по предпочтительности). Под xRy будем понимать, что верно либо xPy, либо xIy, т.е. $R = P \cup I$. Отношения P, I и N восстанавливаются по R (или же отношение R порождает P, I и N);
- xIy, когда одновременно xRy и yRx;
- xPy, когда xRy, но yRx неверно; xNy, когда неверно ни xRy, ни yRx.

Модель анализа многокритериальной задачи

Время, затрачиваемое на решение многокритериальной задачи проектирования, значительно сокращается при уменьшении размерности векторного критерия. Поэтому вопрос уменьшения этой размерности представляется весьма важным. Примером критерия, который может быть несущественным на раннем этапе проектирования, является стоимость технической системы. В самом деле, предположим, что одновременное неуменьшение всех существенных характеристик технической системы приводит к соответствующему неуменьшению ее стоимости. Тогда критерий стоимости может быть исключен из векторного критерия, поскольку это не приведет к сокращению множества оптимальных, по Парето, стратегий [1; 4]. В данной ситуации критерий стоимости целесообразнее использовать на следующем этапе выбора проекта системы из набора оптимальных, по Парето, проектов.

Задача векторной (или многокритериальной) оптимизации заключается в выборе стратегии x из множества X возможных стратегий при наличии векторного критерия:

$$W = \left(W_1,\ldots,W_m\right) : X \to R^m.$$

Без потери общности предположим, что по каждому частному критерию W_i желательно иметь возможно большее значение [2]. В качестве решения этой задачи обычно берется одна из стратегий, принадлежащих множеству эффективных стратегий:

$$P = \left\{x \in X \middle| \nexists\ y \in X : W\left(y\right) \geq W\left(x\right)\right\}.$$

В многокритериальных задачах проектирования сложных технических систем [1] часто требуется построить конечное множество $P' \subset P$, удовлетворяющее следующему условию: для всякой стратегии $x \in P$ должна найтись стратегия $e \in P'$ такая, что $\left|W\left(x\right) - W\left(y\right)\right| \leq \xi$, где $\xi > 0$ мало. В [1] P' строится как объединение решений двухэтапных лексикографических задач:

$$\left(\min_{1 \leq i \leq m} \lambda_i W_i\left(x\right), \sum_{i=1}^{m} W_i\left(x\right)\right) \to lex \quad \max_{x \in X}$$

когда $\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_m)$ пробегает достаточно плотную конечную δ-сеть множества $\Lambda = \left\{\lambda \middle| \sum_{i=1}^{m}\lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i = \overline{1,m}\right\}$. Трудоемкость построения множества P' возрастает с увеличением размерности векторного критерия W. В данной работе исследуется вопрос уменьшения этой размерности путем исключения W несущественных качественных критериев.

Для непустого собственного подмножества S множества $I = \{1, 2, ..., m\}$ положим $W_S = (W_i, i \in S)$. Пусть P_S — множество эффективных стратегий из множества X по векторному (или скалярному, если S — одноэлементно) критерию W_S. Критерий W_S назовем базисным, если $P_S \supset P$. Если существует базисный критерий W_S, то в рассмотренном выше лексикографическом критерии [1; 3] в качестве первого критерия можно использовать $\min_{i \in S} \lambda_i W_i(x)$, а δ-сеть по $\lambda_S = (\lambda_i, i \in S)$ брать из множества:

$$\Lambda_S = \left\{\lambda_S \middle| \sum_{i \in S}\lambda_i = 1, \lambda_i > 0, i \in S\right\}.$$

Критерий Ws является базисным, если, например, из неравенства $W_S(x') \geq W_S(x'')$, $x', x'' \in X$ всегда следует неравенство $W_{I/S}(x') \geqq W_{I/S}(x'')$.

Рассмотрим вопрос проверки базисного критерия и способы нахождения базисных критериев.

Утверждение 1. Для того чтобы критерий W_S был базисным, необходимо и достаточно, чтобы для любых стратегий $x, y \in P$ $W_S(x) \geq W_S(y)$.

Займемся вопросом проверки базисности критерия W_S. Если множество X конечно, то эту проверку можно осуществить перебором, используя утверждение 1.

Теперь рассмотрим линейную задачу векторной оптимизации. Предположим, что X — выпуклый многогранник евклидова пространства, а критерии $W_i, i = \overline{1,m}$ линейны на X. Пусть Π — множество пар стратегий их множества $D = \left\{(x,y) \in X^2 \middle| W_S(x) \geqq W_S(y)\right\}$, эффективных по векторному критерию $(W(x), W(y))$ размерности $2m$. Через Π' обозначим множество пар $(x, y) \in \Pi$, являющихся вершинами многогранника D. Положим

$$Q = \left\{y \in X \middle| \exists x : (x,y) \in \Pi', W_S(x) \geq W_S(y)\right\}.$$

Утверждение 2. В линейной задаче векторной оптимизации для того, чтобы критерий W_S был базисным, необходимо и достаточно, чтобы $Q \cap P = \emptyset$.

Необходимость. Предположим, что критерий Ws является базисным, $Q \cap P = \emptyset$ и $y \in Q \cap P$. Тогда для некоторой стратегии $x \in X$ $(x,y) \in \Pi'$ и $W_S(x) \geq W_S(y)$. Заметим, что $x \in P$. В самом деле, если найдется стратегия $z \in X : W(z) \geq W(x)$, то $(z,y) \in D$ и $(W(z), W(y) \geq W(x), W(y))$ (противоречие с тем, что $(x,y) \in \Pi$).

Итак, $(x,y) \in P^2$ $W_S(x) \geq W_S(y)$ и критерий W_S не являются базисными в силу утверждения 1.

Достаточность. Пусть $Q \cap P = \emptyset$. Предположим, что найдется пара $(x,y) \in P^2$ такая, что $W_S(x) \geq W_S(y)$. Тогда $(x,y) \in \Pi$ и для некоторого конечного набора пар:

$$(x^j, y^j) \in \Pi', \quad j = \overline{1,k} \quad (x,y) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j (x^j, y^j),$$

где $\lambda_j > 0$, $j = \overline{1,k}$ $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j = 1$.

Поскольку $W_S(x) \geq W_S(y)$, найдется номер j_0 такой, что $y^{j0} \in Q$. Следовательно, $y^{j0} \notin P$ и $y = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j y^j \notin P$ (противоречие). Утверждение доказано.

Из утверждения 2 вытекает следующий способ проверки базисности критерия W_S в линейной задачи векторной оптимизации. Сначала известными методами [1; 4] строится множество Π'. Затем находится множество Q и для каждой стратегии $y \in Q$ осуществляется проверка ее принадлежности множеству P.

Пусть X — компакт метрического пространства, а критерии W_i, $i = \overline{1,m}$ непрерывны на X. В этих условиях проверка базисности критерия W_S может вызывать затруднения. Рассмотрим метод, который, хотя и не всегда, обеспечивает эту проверку, в практическом отношении может оказаться пригодным.

Пусть число $\xi > 0$ мало, а P' — конечное подмножество множества P, определенное в п. 1. Если для некоторой стратегии $y \in P'$ $\left\{x \in X \middle| W_S(x) \geq W_S(y)\right\} = \emptyset$, то нельзя гарантировать базисность критерия W_S. Но поскольку $P' \subset P_S$, можно считать критерий W_S «ξ-базисным» и отбросить все критерии W_i, $i \in I \backslash S$.

Алгоритм поиска базисного критерия

Алгоритм удобно разбить на m этапов.

Первый этап начинается с проверки базисности критерия $W_{I\setminus\{1\}}$. Предположим, что критерий $W_{I\setminus\{1\}}$ не является базисным, и нашлись стратегии $x,y \in P$ такие, что $W_{I\setminus\{1\}}(x) \geq W_{I\setminus\{1\}}(y)$. Если W_S, где $1 \in S$ — базисный критерий, то необходимо $S \subset S' = \{i \in I \setminus \{1\} | W_i(x) = W_i(y)\}$. Поэтому затем проверяется базисность критерия $W_{S'}$. Предположим, что нашлись стратегии $x', y' \in P$ такие, что $W_{S'}(x') \geq W_{S'}(y')$. Тогда проверяется базисность критерия $W_{S''}$, где $S'' = \{i \in S' | W_i(x') = W_i(y')\}$, и т.д. до тех пор, пока не исчерпается множество $I \setminus \{1\}$. Если базисный критерий не обнаружен, то можно заключить, что ни один критерий W_S, $1 \notin S$ базисным не является. На этом завершается первый этап алгоритма.

Второй этап начинается с проверки базисности критерия $W_{I\setminus\{2\}}$ и аналогичен первому этапу. Здесь только нужно учитывать, что критерий W_1 должен входить в базисный критерий. Точно так же i-й этап алгоритма начинается с проверки базисного критерия $W_{I\setminus\{i\}}$ и при этом критерии W_1, ..., W_{i-1} входят в базисный критерий. В процессе выполнения всех m этапов алгоритма либо будет найден базисный («ξ-базисный») критерий, либо будет установлено отсутствие такого. При этом общее число проверок на базисность не превзойдет $\frac{m(m+1)}{2} - 1$.

Если нужно найти все базисные критерии (например, с целью отыскания базисного критерия наименьшей размерности), то необходимо пройти все m этапов алгоритма. В результате будет найдено некоторое множество $\{W_{Sj}, j = \overline{1,k}\}$ базисных критериев. Далее нужно проверить на базисность критерии W_S, где $S \subset \bigcup_{j=1}^{k} 2^{Sj}$, вновь используя с небольшими изменениями предложенный алгоритм. В результате будет построено новое семейство базисных критериев. Процесс завершается построением всех базисных критериев.

Приведем утверждение, которое может оказаться полезным при поиске критериев.

Утверждение 3. Пусть W_S — базисный критерий и для любых $x, y \in P_S^2$ из $W_S(x) = W_S(y)$ следует $W(x) = W(y)$. Тогда при всех $T \supset S$ критерий W_T является базисным.

Если W_S — базисный критерий, но второе условие утверждения 3 не выполнено, то утверждение, вообще говоря, не имеет места.

Заключение

Таким образом, процесс поиска базисного критерия в задачах проектирования сложных систем является весьма трудоемким. Он может оправдать себя в тех случаях, когда приходится большое число раз решать многокритериальные задачи с одним и тем же векторным критерием, но на разных множествах X (например, при проектировании сложных технических систем [1]). В случаях, когда такой критерий удалось найти на достаточно «широком» множестве X, то далее его можно использовать для построения сеток на множествах Парето для рассмотренного класса многокритериальных задач.

Литература

1. *Цвиркун А.Д.* Основы синтеза структуры сложных систем [Текст] / А.Д. Цвиркун. — М.: Наука, 1982. — 200 с.
2. *Белоусов В.Е.* Алгоритм для анализа вариантов решений в многокритериальных задачах [Текст] / В.Е. Белоусов, П.Ю. Аксененко, С.А. Кончаков // Системы управления и информационные технологии. – 2015. — № 4. – С. 31–33.
3. *Белоусов В.Е.* К проблеме решения задач многокритериальной оптимизации [Текст] / В.Е. Белоусов, А.В. Гайдук, В.Н. Золоторев // Системы управления и информационные технологии. – 2006. — № 3. – С. 34–43.
4. *Белоусов В.Е., Лютова К.Г., Нгуен Вьет Туан.* Модели квалиметрической оценки состояний сложных технических систем [Электронный ресурс] // «Качество продукции: контроль, управление, повышение, планирование». Матер. Международная молодежная научно-практическая конференция 17–18 ноября 2015 г. — Курск: Изд-во Юго-Западного государственного университета, 2015. — Т. 1. — С. 342–346.

References

1. Tsvirkun A.D. *Osnovy sinteza struktury slozhnykh sistem* [Basics of synthesis of the structure of complex systems]. Moscow: Nauka Publ., 1982. 200 p.
2. Belousov V.E. Algoritm dlya analiza variantov resheniy v mnogokriterial'nykh zadachakh [Algorithm for the analysis of solution options in multicriteria problems]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies]. 2015, I. 4, pp. 31–33.
3. Belousov, V.E. K probleme resheniya zadach mnogokriterial'noy optimizatsii [On the problem of solving multicriteria optimization problems]. *Sistemy upravleniya i informatsionnye tekhnologii* [Control Systems and Information Technologies]. 2006, I. 3, pp. 34–43.
4. Belousov V.E., Lyutova K.G., Nguen V'et Tuan. Modeli kvalimetricheskoy otsenki sostoyaniy slozhnykh tekhnicheskikh sistem [Models of qualimetric assessment of the states of complex technical systems]. *«Kachestvo produktsii: kontrol', upravlenie, povyshenie, planirovanie». Mezhdunarodnaya molodezhnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya. Kursk (17–18 noyabrya 2015 g.)* ["Product quality: control, management, enhancement, planning". Mater International Youth Scientific and Practical Conference. Kursk (November 17–18, 2015)]. Yugo-Zapadniy gosudarstvenniy universitet Publ., V. 1, 2015, pp. 342–346.