Construction and Architecture (2019) Vol. 7. Issue 3 (24): 5–12
При цитировании этой статьи ссылка на DOI обязательна DOI 10.29039/2308-0191-2019-7-3-5-12

05.23.17 ГИДРОТЕХНИЧЕСКОЕ СТРОИТЕЛЬСТВО

Решение уравнений движения двухмерного водного потока

УДК 621.771.01

Коханенко В.Н.
Д-р техн. наук, профессор, кафедра «Общеинженерные дисциплины», Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова (г. Новочеркасск)

Келехсаев Д.Б.
Аспирант, кафедра «Общеинженерные дисциплины», Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова (г. Новочеркасск)

Кондратенко А.И.
Канд. техн. наук, доцент кафедры «Инженерные конструкции», Московский государственный аграрный университет МСХА им. К.А. Тимирязева (г. Москва)

Евтушенко С.И.
Д-р техн. наук, профессор, кафедра «Информационные системы, технологии и автоматизация строительства»; ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет», г. Москва; e-mail: evtushenkosi@mgsu.ru

Статья получена: 26.10.2019. Рассмотрена: 10.11.2019. Одобрена: 12.11.2019. Опубликована онлайн: 26.11.2019. ©РИОР

Аннотация. В статье рассматриваются уравнения двумерного потока воды, которая течет из безнапорных труб прямоугольного или круглого сечения. Для упрощения задачу, реальный трехмерный поток моделируется как двумерная зона с постоянными скоростями и ускорением жидкости в направлении, перпендикулярном зоне потока. Для описания закона движения потока воды используются уравнения Л. Эйлера для идеальной жидкости с учетом уравнений неразрывности и уравнения Бернулли. Модели двумерного потока в зоне распространения с достаточной для практики степенью адекватности описывают движение водных потоков,

SOLUTION OF EQUATIONS OF MOTION OF TWO-DIMENSIONAL WATER FLOW

Viktor Kokhanenko
Doctor of Engineering, Professor, Department of General engineering disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk
Dmitriy Kelekhsaev
Graduate student, Department of General engineering disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk
Anatoliy Kondratenko
Candidate of technical Sciences, Docent,
Russian State Agrarian University Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow
Sergey Evtushenko
Doctor of Engineering, Professor, Department of Information systems, technologies and construction automation, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow; e-mail: evtushenkosi@mgsu.ru
Manuscript received: 26.10.2019. **Revised:** 10.11.2019. **Accepted:** 12.11.2019. **Published online:** 26.11.2019. ©RIOR

Abstract. The paper studies a two-dimensional water flow that flows from a non-pressure rectangular or round pipe into a wide horizontal channel. To simplify the problem, the real three-dimensional flow is modeled as a two-dimensional zone by eliminating the velocities and accelerations of liquid particles in the direction perpendicular to the flow zone. To describe the law of motion of the water flow, the equations of L. Euler for the ideal fluid are used, taking into account the continuity equations and the Bernoulli equation. Models of two-dimensional flow in the spreading zone with the degree of adequacy sufficient for practice describe the movement of water flows arising in the lower races of road drainage systems, systems of Liman irrigation, small bridges, channels of volley of water, various culverts and water-crossing facilities. The obtained dependences of the velocity distribution, depth and water flow geometry give an accuracy exceeding that known by the previously used methods both by the velocity values and by the geometry of the boundary current lines.

Keywords: hydraulic structures, two-dimensional open water flow, rectangular and circular cross-section pipes, wide horizontal diverting channel, Euler equations, calculation of velocities and boundary current lines.

возникающих в нижних бьефах дорожных дренажных систем, систем орошения, небольших мостов, каналов водоемов, различных водопропускных труб. Полученные зависимости распределения скоростей, глубины и геометрии потока воды дают большую точность, чем использованные ранее методы, как по значениям скорости, так и по геометрии граничных линий тока. Это позволяет рассчитывать параметры гидротехнических сооружений.

Ключевые слова: гидротехнические сооружения, двумерный бурный поток воды, трубы прямоугольного и круглого сечения, широкий горизонтальный отводящий канал, уравнения Эйлера, расчет скоростей и граничных линий тока.

Основные допущения и исходные физические предпосылки двухмерных в плане водных потоков следующие [1; 2]:

а) вертикальные (или нормальные к выбранной координатной плоскости) составляющие местных осредненных скоростей и ускорений малы;

б) векторы скоростей жидких частиц, расположенных на одной вертикали, лежат в одной плоскости;

в) распределение скоростей на любой вертикали практически равномерное.

Можно выделить достаточно широкий класс потоков, параметры которых отвечают этим допущениям.

Такие потоки называют двухмерными в плане, отражая то, что для их описания достаточно двух геометрических координат x, y.

В широкой математической и технической литературе [5–7] известно, что для постановки и решения различных прикладных задач по течению водных потоков необходимо пользоваться уравнениями движения, описывающими процесс течения жидкости, и знать начальные и граничные условия.

Так сложилось исторически, что основоположники теории двухмерных в плане водных потоков исходили из динамических уравнений движения идеального двухмерного открытого водного потока в форме Л. Эйлера (уравнений движения идеальной жидкости), дополненных слагаемыми, учитывающими силы сопротивления жидкости [1; 2]:

$$\begin{cases} X - \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial x} - T_x = \dfrac{du_x}{dt}; \\ Y - \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial y} - T_y = \dfrac{du_y}{dt}; \\ Z - \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial z} - T_z = \dfrac{du_z}{dt}, \end{cases} \tag{1}$$

где X, Y, Z — компоненты объемных сил;

T_x, T_y, T_z — компоненты сил сопротивления, отнесенных к единице массы жидкости;

ρ — плотность жидкости;

p — местное давление;

u_x, u_y, u_z — компоненты вектора местной скорости.

Для установившегося потока при вертикальном направлении оси z и действии в жидкости единственной объемной силы (силы тяжести) система (1) приобретает вид:

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial x} - T_x = u_x\dfrac{du_x}{dx} + u_y\dfrac{du_x}{dy} + u_z\dfrac{du_x}{dz}; \\ -\dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial y} - T_y = u_x\dfrac{du_y}{dx} + u_y\dfrac{du_y}{dy} + u_z\dfrac{du_y}{dz}; \\ -g - \dfrac{1}{\rho}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial z} - T_z = u_x\dfrac{du_z}{dx} + u_y\dfrac{du_z}{dy} + u_z\dfrac{du_z}{dz}. \end{cases} \tag{2}$$

В силу посылки о малости вертикальных составляющих скоростей и ускорений все инерционные составляющие, содержащие uz и ее производные, могут быть отброшены.

Тогда третье уравнение системы (2) примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho, \tag{3}$$

где g — ускорение силы тяжести.

Интегрируя уравнение (3), получим:

$$p = -\gamma z + f\left(x, y\right), \tag{4}$$

где $f(x, y)$ — произвольная функция.

С учетом того, что на свободной поверхности $z = z_n$ и $p = p_n = \text{const}$, приходим к гидростатическому закону распределения давлений на вертикали:

$$p - p_n = \gamma\left(z_n - z\right) \qquad (5)$$

Обозначив через z_0 координату дна водотока, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \gamma\frac{\partial}{\partial x}\left(z_0 + h\right); \ \frac{\partial p}{\partial y} = \gamma\frac{\partial}{\partial y}\left(z_0 + h\right). \qquad (6)$$

Тогда систему динамических уравнений движения потока можно записать в виде:

$$\begin{cases} u_x\dfrac{du_x}{dx} + u_y\dfrac{du_x}{dy} = -g\dfrac{\partial}{\partial x}\left(z_0 + h\right) - T_x; \\ u_x\dfrac{du_y}{dx} + u_y\dfrac{du_y}{dy} = -g\dfrac{\partial}{\partial y}\left(z_0 + h\right) - T_y. \end{cases} \qquad (7)$$

Дополнив эту систему уравнений уравнением неразрывности потока:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(hu_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(hu_y\right) = 0, \qquad (8)$$

получим следующую систему течения потока в виде:

$$\begin{cases} u_x\dfrac{du_x}{dx} + u_y\dfrac{du_x}{dy} = -g\dfrac{\partial}{\partial x}\left(z_0 + h\right) - T_x; \\ u_x\dfrac{du_y}{dx} + u_y\dfrac{du_y}{dy} = -g\dfrac{\partial}{\partial y}\left(z_0 + h\right) - T_y; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(hu_x\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(hu_y\right) = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

В частном случае, когда дно водовода горизонтальное, система (9) приобретает вид:

$$\begin{cases} u_x\dfrac{du_x}{dx} + u_y\dfrac{du_x}{dy} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = -T_x; \\ u_x\dfrac{du_y}{dx} + u_y\dfrac{du_y}{dy} + g\dfrac{\partial h}{\partial y} = -T_y; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(hu_x\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(hu_y\right) = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

В ряде потоков, встречающихся в практике (выход потока из отверстия в расширение, вход потока в сужение, течение на виражах, на коротких участках) силами сопротивления потоку можно пренебречь, особенно в бурных высокоскоростных потоках, для которых силы инерции значительно превосходят силы тяжести, и система уравнений (10) приобретает вид:

$$\begin{cases} u_x\dfrac{du_x}{dx} + u_y\dfrac{du_x}{dy} + g\dfrac{\partial h}{\partial x} = 0; \\ u_x\dfrac{du_y}{dx} + u_y\dfrac{du_y}{dy} + g\dfrac{\partial h}{\partial y} = 0; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(hu_x\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(hu_y\right) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Система дифференциальных уравнений в частных производных (11) описывает течение двухмерных в плане открытых стационарных потоков в горизонтальном водоводе без учета сил сопротивления потоку.

Эта система является системой существенно нелинейных уравнений, замкнутой относительно неизвестных функций:

$$u_x = u_x\left(x, y\right); \ u_y = u_y\left(x, y\right); \ h = h\left(x, y\right).$$

С использованием системы (11) решаются различные задачи по течению двухмерных в плане водных потоков, как прямые, так и обратные [1; 2].

Если ввести дополнительное условие потенциальности потока:

$$\Omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \qquad (12)$$

где Ω — вихрь для двухмерного потока, то существует потенциальная функция $\varphi = \varphi\left(x, y\right)$ такая, что $u_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}; \ u_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}$.

Система уравнений (11) в этом случае сводится к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{u_x^2 + u_y^2}{2g} + h = H_0 \quad \text{или} \quad \dfrac{V^2}{2g} + h = H_0; \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(hu_x\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(hu_y\right) = 0; \\ u_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}; \ u_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}, \end{cases} \qquad (13)$$

где H_0 — постоянная для всего потока, определяемая по параметрам потока V_0, h_0 в некоторой характерной точке потока.

Первое конечное уравнение в системе (13) имеет название интеграла Д. Бернулли для двухмерных в плане водных потоков.

Система уравнений (13) сводится к одному уравнению второго порядка в частных производных относительно потенциальной функции $\varphi = \varphi(x, y)$:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\left[C^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2\right] - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \\ + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\left[C^2 - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right] = 0, \tag{14}$$

где $C = \sqrt{gh}$; $h = H_0 - \dfrac{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2}{2g}$.

Это уравнение по внешнему виду совпадает с уравнением для потенциала скорости плоского безвихревого газа, причем скорости звука соответствует волновая скорость C [8].

Из уравнения неразрывности потока (8) следует существование функции тока, удовлетворяющей условиям:

$$hu_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}; \; hu_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{15}$$

Поэтому систему (11) можно свести также к одному дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных относительно функции тока $\psi = \psi(x, y)$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\left[1 - \frac{1}{C^2h^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\times \\ \times\left[1 - \frac{1}{C^2h^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right] - \frac{2}{C^2h^2}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} = 0. \tag{16}$$

Уравнения (14), (16) служат исходными для разработки методов расчета двухмерных в плане бурных потоков [1; 2].

Для бурных потоков эти уравнения относятся к гиперболическому типу и для их исследования может быть использован метод характеристик [1; 2].

К сожалению, метод расчета потоков с использованием характеристик является численно-графо-аналитическим и дает не всегда достаточную адекватность для практического пользования результатами модели.

Гораздо более точные результаты дают аналитические модели, изложенные в монографиях [9—11].

Следует заметить, что модель двухмерного в плане потенциального бурного потока, несмотря на значительную степень идеализации, имеет важное теоретическое и практическое значение.

Теоретическое значение заключается в том, что, исследуя простую модель, можно выявить характерные свойства потока и использовать их в более сложных моделях.

Практическое использование результатов модели потенциального течения в горизонтальном русле возможно в случаях, когда роль сил сопротивления относительно невелика (местные сужения, расширения или изгибы русла). В таких потоках основное формирующее влияние на параметры потока оказывает его инерционность и, если протяженность потока незначительна, влиянием сил сопротивления можно пренебречь.

Аналитические методы решения различных задач по течению двухмерных в плане потенциальных потоков применяются:

а) в случае упрощений для потенциальной модели:
- уравнения движения простой центрированной волны;
- радиальный поток (безнапорный потенциальный источник) [1; 2].

б) при использовании вспомогательной плоскости годографа скорости [9; 10].

Согласно уравнениям (13), (15) систему движений двухмерных в плане потенциальных водных потоков можно записать в виде:

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad u_y = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y}; \\ \dfrac{h}{h_0}u_x = \dfrac{\partial\psi}{\partial y}; \quad \dfrac{h}{h_0}u_y = -\dfrac{\partial\psi}{\partial x}; \\ \dfrac{V^2}{2g} + h = H_0; \quad V^2 = u_x^2 + u_y^2. \end{cases} \tag{17}$$

Переходом в плоскость годографа скорости $\Gamma(\tau, \theta)$, в которой независимыми координатами являются $\tau = \dfrac{V^2}{2gH_0}$ (квадрат скоростного коэффициента) и угол θ, характеризующий направление вектора скорости, уравнения (17) трансформируются к виду [9—11]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \dfrac{h_0}{2H_0}\cdot\dfrac{3\tau-1}{\tau(1-\tau)^2}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\dfrac{h_0}{H_0}\cdot\dfrac{\tau}{1-\tau}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}. \end{cases} \quad (18)$$

Формулы для определения глубин и скоростей при заданном параметре τ имеют вид:

$$h = H_0(1-\tau);\; V = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}. \quad (19)$$

Зависимыми параметрами, неизвестными функциями в системе (18) являются $\varphi = \varphi(\tau,\theta)$ — потенциальная функция; $\psi = \psi(\tau,\theta)$ — функция тока, при этом для бурных потоков

$$\frac{1}{3} < \tau \le 1. \quad (20)$$

Формулы (19) следуют из интеграла Бернулли и из выражения для параметра τ.

Система уравнений (18) является уже линейной системой дифференциальных уравнений в частных производных в отличие от системы (11). Эта система сводится к решению следующего уравнения математической физики:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{2\tau}{1-\tau}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right) + \frac{1-3\tau}{2\tau(1-\tau)^2}\cdot\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0. \quad (21)$$

Это уравнение рядом замен приводится к гипергеометрическому уравнению с действительными коэффициентами, решения которого известны. Авторы работы на базе аналитических решений системы (18) развили метод, который может использоваться при решении различных задач по течению потенциальных двухмерных в плане открытых стационарных водных потоков [9; 10].

Сначала решается граничная задача в плоскости годографа скорости.

Далее переход в физическую плоскость течения потока осуществляется использованием дифференциальной связью между планом течения потока и плоскостью годографа скорости:

$$d(x+iy) = \left[d\varphi + i\frac{h_0}{H_0(1-\tau)}d\psi\right]\frac{e^{i\theta}}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}}, \quad (22)$$

где $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица;

x, y — координаты жидкой частицы потока в плане его течения;

τ, θ — независимые координаты в плоскости годографа скорости;

$\varphi = \varphi(\tau,\theta)$ — потенциальная функция;

$\psi = \psi(\tau,\theta)$ — функция тока.

В работах [9—11] авторы разработали детальную технологию решения задач по течению двухмерных в плане потенциальных потоков.

В работах [1; 2] приведены уравнения характеристик в плоскости годографа скорости; этот результат и аналогия внешнего вида уравнений совершенного газа и потенциального двухмерного в плане водного потока позволили авторам работ [9—11] использовать преобразование С.А. Чаплыгина [8] для получения системы (18) и разделения решения граничной задачи на два этапа:

1-й — решение задачи в плоскости годографа скорости;

2-й — получение алгоритма определения параметров потока в физической плоскости течения (в плане течения) с помощью интегрирования связи (22) при найденных на 1-м этапе функциях $\varphi(\tau,\theta)$ и $\psi(\tau,\theta)$.

Далее приведем один из методов определения сил сопротивления потоку при использовании системы (9).

Для потоков, в которых нельзя пренебречь силами сопротивления потоку со стороны водовода, учет сил сопротивления можно по предложению авторов в [1; 2; 9] осуществить сведением поверхностных сил к некоторым эквивалентным объемным.

Если τ — касательное напряжение в основании элементарного цилиндрического объема, то сила трения по дну равна τds. Направление вектора этой силы противоположно направлению вектора скорости $\vec{V}$. Тогда абсолютные величины этой силы, отнесенные к единице массы выделенного объема, выразятся формулами:

$$T_x = \frac{\tau}{\rho h}\cdot\frac{u_x}{V};\; T_y = \frac{\tau}{\rho h}\cdot\frac{u_y}{V}. \quad (23)$$

Или, вводя коэффициент гидравлического трения:

$$\lambda = \frac{2\tau}{\rho V^2}, \qquad (24)$$

компоненты сил сопротивления переписываются в виде:

$$T_x = \frac{\lambda u_x V}{2h}; \; T_y = \frac{\lambda u_y V}{2h}. \qquad (25)$$

Как известно из [12], коэффициент Шези C связан с коэффициентом гидравлического трения соотношением [13]:

$$\lambda = \frac{2g}{C^2},$$

причем $C = \frac{h^y}{n}$; показатель y определяется конкретным законом сопротивления, приводимым в известной литературе по гидравлике; n — коэффициент шероховатости стенок водовода.

Для разрывных течений по параметрам потока пользуются двухмерными уравнениями планового потока (Сен-Венана), записанными в виде [14]:

$$\oint_S \varphi\, dxdy + \Pi dydt + \Phi dxdt = \int_R \Psi dxdydt, \qquad (26)$$

где $\varphi = \begin{bmatrix} z_n \\ uh \\ \upsilon h \end{bmatrix}$; $\Pi = \begin{bmatrix} uh \\ u^2 h + \frac{gh^2}{2} \\ u\upsilon h \end{bmatrix}$; $\Phi = \begin{bmatrix} \upsilon h \\ u\upsilon h \\ \upsilon^2 h + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix}$;

$$\Psi = \begin{bmatrix} 0 \\ -gh\frac{\partial z_д}{\partial x} - 0{,}5\lambda\sqrt{u^2+\upsilon^2}\cdot u \\ -gh\frac{\partial z_4}{\partial y} - 0{,}5\lambda\sqrt{u^2+\upsilon^2}\cdot \upsilon \end{bmatrix},$$

где S — произвольная поверхность в пространстве (x, y, t), ограничивающая некоторый объем R в этом же пространстве; h — глубина потока; u, υ — соответственно продольная и поперечная компоненты скорости; $z_п$ — отметка свободной поверхности потока; $z_д$ — отметка дна; λ — коэффициент гидравлического трения; g — ускорение силы тяжести.

Для дифференцируемых функций, применяя к (26) теорему Гаусса — Остроградского [3], после некоторых преобразований получим уравнения Сен-Венана в дифференциальном виде [14]:

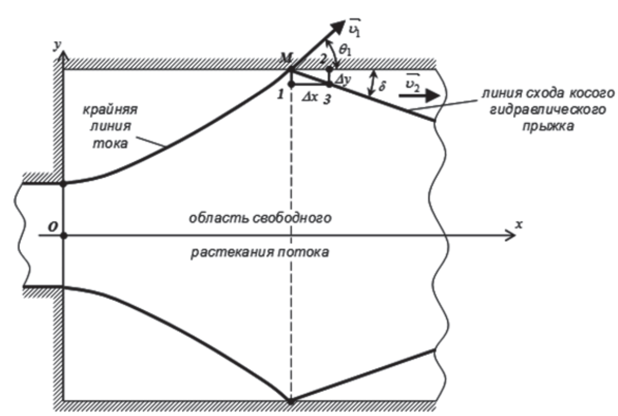
$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{du}{dx} + \upsilon\frac{du}{dy} + g\frac{\partial z_n}{\partial x} = -\lambda\frac{\sqrt{u^2+\upsilon^2}\cdot u}{2h}; \\ \frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon\frac{d\upsilon}{dy} + g\frac{\partial z_n}{\partial y} = -\lambda\frac{\sqrt{u^2+\upsilon^2}\cdot \upsilon}{2h}; \\ \frac{\partial z_n}{\partial t} + \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon h}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (27)$$

Для стационарных потоков и для $z_п = h$ и при $\lambda = 0$ получим:

$$\begin{cases} u\frac{du}{dx} + \upsilon\frac{du}{dy} + g\frac{\partial h}{\partial x} = 0; \\ u\frac{d\upsilon}{dx} + \upsilon\frac{d\upsilon}{dy} + g\frac{\partial h}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial uh}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon h}{\partial y} = 0. \end{cases} \qquad (28)$$

Эта система совпадает с точностью до обозначений компонент скорости с системой (11).

Приведем метод решения важной для практики задачи определения сопряженных параметров струи двухмерного в плане бурного потока при ее ударе о боковую стенку (рис. 1) на базе использования уравнений движения в интегральной форме.



о боковую стенку русла

Пусть в точке M до удара крайней линии потока о боковую стенку русла он имеет параметры V_1, h_1, θ_1.

Необходимо определить параметры потока в точке M после удара V_2, h_2 и угол δ отклонения линии схода от боковой стенки русла.

Для определения величин V_2, h_2, δ воспользуемся уравнением стационарного движения потока в интегральной форме без учета сил сопротивления потоку:

$$\oint\limits_{\Gamma}\left(\vec{\Pi}dy + \vec{\Phi}dx\right) = 0, \tag{29}$$

где

$$\Pi = \begin{bmatrix} Vh\cos\theta \\ V^2h\cos^2\theta + \dfrac{gh^2}{2} \\ V^2h\cos\theta\sin\theta \end{bmatrix};$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} Vh\sin\theta \\ V^2h\cos\theta\sin\theta \\ V^2h\sin^2\theta + \dfrac{gh^2}{2} \end{bmatrix}.$$

Составляя алгоритмическую форму уравнения применительно к четырехточечному шаблону *1M23* (см. рис. 1), две точки которого находятся на линии схода, и разрешая ее относительно параметров потока в точке M, получим алгебраическую систему:

$$\begin{cases} Vh\cos\theta + KVh\sin\theta = r_1; \\ V^2h\cos^2\theta + \dfrac{gh^2}{2} + KV^2h\cos\theta\sin\theta = r_2; \\ V^2h\cos\theta\sin\theta + K\left[V^2h\sin^2\theta + \dfrac{gh^2}{2}\right] = r_3. \end{cases} \tag{30}$$

Так как до удара крайней линии тока о боковую стенку системе (30) должны удовлетворять параметры V_1, h_1, θ_1, то

$$\begin{cases} r_1 = a_1 + KC_1; \\ r_2 = a_2 + KC_2; \\ r_3 = a_3 + KC_3, \end{cases} \tag{31}$$

где $a_1 = V_1h_1\cos\theta_1;\; C_1 = V_1h_1\sin\theta_1;$

$$a_2 = V_1^2h_1\cos^2\theta_1 + \frac{gh_1^2}{2};\; C_2 = V_1^2h_1\cos\theta_1\sin\theta_1;$$

$$a_3 = V_1^2h_1\cos\theta_1\sin\theta_1;\; C_3 = V_1^2h_1\sin^2\theta_1 + \frac{gh_1^2}{2}.$$

За прыжком в точке M угол $\theta_2 = 0$ и, следовательно, из системы (30) следует:

$$\begin{cases} V_2h_2 = r_1; \\ V_2^2h_2 + \dfrac{gh_2^2}{2} = r_2; \\ K\dfrac{gh_2^2}{2} = r_3. \end{cases} \tag{32}$$

В системе (32) три неизвестных параметра V_2, h_2, K и для ее совместности должно выполняться условие:

$$r_1^4K^3g - 2r_3\left(r_2K - r_3\right)^2 = 0. \tag{33}$$

Определив из уравнения (33) неизвестное K, определим далее и сопряженные параметры потока V_2, h_2, δ за прыжком:

$$h_2 = \sqrt{\frac{2r_3}{Kg}};\; V_2 = \frac{r_1}{h_2};\; \delta = \operatorname{arctg}\frac{1}{K}. \tag{34}$$

Ранее в литературе по гидравлическим расчетам для решения задачи определения параметров V_2, h_2, δ необходимо было пользоваться громоздкими номограммами [15], имеющими ограничения $\theta_1 < 67°$, что сильно затрудняло получение достоверного результата.

Выводы. Исследователи в области моделирования течений двухмерных в плане открытых водных потоков могут воспользоваться уравнениями движения потока в зависимости от решаемой задачи в любой форме, изложенной в настоящей работе, и получить результаты моделирования с точностью, превышающей известную по ранее используемым методам. Особенно удобен метод расчета потенциальных потоков с использованием плоскости годографа скорости.

Литература

1. *Емцев Б.Т.* Двухмерные бурные потоки [Текст] / Б.Т. Емцев. — М.: Энергия, 1967. — 212 с.
2. *Высоцкий Л.И.* Управление бурными потоками на водосбросах [Текст] / Л.И. Высоцкий. — М.: Энергия, 1990. — 280 с.
3. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1970. — 720 с.
4. *Арсенин В.Я.* Методы математической физики и специальные функции [Текст] / В.Я. Арсенин. — М.: Наука, 1984. — 384 с.
5. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики [Текст] / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. — М.: Наука, 1986. — 106 с.
6. *Есин А.И.* Развитие теории и методов расчёта стационарных и нестационарных движений воды [Текст]: автореф. дис. ... д-ра техн. наук: 05.23.16 / А.И. Есин. — М., 2004. — 48 с.
7. *Есин А.И.* Задачи технической механики жидкости в естественных координатах [Текст] / А.И. Есин / ФГОУ ВПО «Саратовский ГАУ». — Саратов, 2003. — 144 с.
8. *Чаплыгин С.А.* Избранные труды [Текст] / С.А. Чаплыгин / Механика жидкости и газа. Математика. Общая механика. — М.: Наука, 1976. — 496 с.
9. *Коханенко В.Н.* Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков [Текст] / НГМА; В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общ. ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. — 168 с.
10. *Коханенко В.Н.* Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, М.А. Лемешко, Н.Г. Папченко; под общ. ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. — 180 с.
11. *Ширяев В.В.* Развитие теории двухмерных открытых водных потоков [Текст]: монография / В.В. Ширяев, М.Ф. Мицик, Е.В. Дуванская; под общ. ред. В.В. Ширяева. — Шахты: Изд-во ЮРГУЭС, 2007. — 133 с.
12. *Штеренлихт Д.В.* Гидравлика [Текст] / Д.В. Штеренлихт. — 3-е изд., перераб. — М.: Колос, 2005. — 656 с.
13. Справочник по гидравлике [Текст]; под ред. В.А. Большакова. — 2-е изд., перераб. и доп. — К.: Вища школа, 1984. — 343 с.
14. *Милитеев А.Н.* Метод расчёта сопряжения бьефов в пространственных условиях [Текст] / А.Н. Милитеев, Н.П. Тогунова / Гидравлика сооружений оросительных систем: тр. НИМИ. — Новочеркасск, 1976. — Т. 18. — Вып. 5. — С. 180–194.
15. *Weiming Wu*, M.ASCE Depth-Averaged Two-Dimensional Numerical Modeling of Unsteady Flow and Nonuniform Sediment Transport in Open Channels // Journal of Hydraulic Engineering Vol. 130. Issue 10 (October 2004). DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:10(1013).

References

1. Emcev B.T. Dvuhmernye burnye potoki [Two-dimensional stormy streams]. Moscow: Energiy Publ., 1967. 212 p.
2. Vysockij L.I. Upravlenie burnymi potokami na vodosbrosah [Management of stormy streams at spillways]. Moscow: Energiya Publ., 1990. 280 p.
3. Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 720 p.
4. Arsenin V.Ya. Metody matematicheskoj fiziki i special'nye funkcii [Methods of mathematical physics and special functions]. Moscow: Nauka Publ., 1984. 384 p.
5. Tihonov A.N., Samarskij A.A. Uravneniya matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: Nauka Publ., 1986. 106 p.
6. Esin A.I. Razvitie teorii i metodov raschyota stacionarnyh i nestacionarnyh dvizhenij vody. Dokt. Diss [The development of the theory and methods of calculating stationary and non-stationary water movements. Doct. Diss]. Moscow, 2004. 48 p.
7. Esin A.I. Zadachi tekhnicheskoj mekhaniki zhidkosti v estestvennyh koordinatah [Tasks of technical fluid mechanics in natural coordinates]. FGOU VPO «Saratovskij GAU» [Saratov State Agrarian University]. Saratov, 2003. 144 p.
8. Chaplygin S.A. Izbrannye trudy [Selected Works]. Mekhanika zhidkosti i gaza. Matematika. Obshchaya mekhanika [Fluid and Gas Mechanics. Maths. General mechanics]. Moscow: Nauka Publ., 1976. 496 p.
9. Kohanenko V.N., Volosuhin Ya.V. Modelirovanie odnomernyh i dvuhmernyh otkrytyh vodnyh potokov [Modeling of one-dimensional and two-dimensional open water flows]. Rostov-on-Don: YuFU Publ., 2007. 168 p.
10. Kohanenko V.N., Volosuhin Ya.V. Modelirovanie burnyh dvuhmernyh v plane vodnyh potokov [Modeling stormy two-dimensional in terms of water flows]. Rostov-on-Don: YuFU Publ., 2013. 180 p.
11. Shiryaev V.V., Micik M.F. Razvitie teorii dvuhmernyh otkrytyh vodnyh potokov [Development of the theory of two-dimensional open water flows]. Shahty: YuRGUES Publ., 2007. 133 p.
12. Shterenliht D.V. Gidravlika [Hydraulics]. Moscow: Kolos Publ., 2005. 656 p.
13. Spravochnik po gidravlike [Handbook of hydraulics]. K.: Vishcha shkola Publ., 1984. 343 p.
14. Militeev A.N., Togunova N.P. Metod raschyota sopryazheniya b'efov v prostranstvennyh usloviyah [The method for calculating the coupling of upstream in spatial conditions]. Gidravlika sooruzhenij orositel'nyh system [Hydraulics of the structures of irrigation systems]. Novocherkassk, 1976, V. 18, I. 5, pp. 180–194.
15. Weiming Wu, M.ASCE Depth-Averaged Two-Dimensional Numerical Modeling of Unsteady Flow and Nonuniform Sediment Transport in Open Channels // Journal of Hydraulic Engineering Vol. 130, Issue 10 (October 2004). DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9429(2004)130:10(1013).