Construction and Architecture (2020) Vol. 8. Issue 2 (27): 44–48
DOI: 10.29039/2308-0191-2020-8-2-44-48 *При цитировании этой статьи ссылка на DOI обязательна*

Двухмерный в плане вихреисточник

УДК 532.5 : 004.942

Коханенко В.Н.
Д-р техн. наук, профессор кафедры общеинженерных дисциплин, ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: victorkohanenko@yandex.ru

Бурцева О.А.
Канд. техн. наук, доцент кафедры общеинженерных дисциплин, ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: kuzinaolga@yandex.ru

Александрова М.С.
Аспирант кафедры «Общеинженерные дисциплины», ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: e_masha@mail.ru

Статья получена: 28.04.2020. Рассмотрена: 20.05.2020. Одобрена: 26.06.2020. Опубликована онлайн: 30.06.2020. ©РИОР

Аннотация. В настоящей работе показывается в принципе метод решения задачи двухмерного в плане течения вихреисточника. Материал статьи относится к математическому моделированию классических задач двухмерных в плане потенциальных потоков. Полученное решение аналогично результатам по плоскому вихреисточнику и является важным результатом для развития аналитической теории двухмерных в плане потенциальных водных потоков. Рас-смотрены другие решения для реальных потенциальных двухмерных потоков, которые авторами уточнены, что подтверждает актуальность работы.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения движения, граничные условия задачи, двухмерные в плане вихреисточники, потенциальные водные потоки, задачи практической гидравлики.

Задачи математического моделирования и расчета двухмерных в плане потенциальных потоков имеют определенное теоретическое значение, а также практическую ценность для реальных потоков, в которых силами потока о дно и стенки русла можно пренебречь [1; 2]. К таким задачам относятся и задачи двухмерного в плане потока:

- источника;
- вихря;
- вихреисточника.

TWO-DIMENSIONAL VORTEX SOURCE
Viktor Kokhanenko
Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of General Engineering Disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk; e-mail: victorkohanenko@yandex.ru
Olga Burtseva
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of General Engineering Disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk; e-mail: kuzinaolga@yandex.ru
Maria Aleksandrova
Postgraduate Student, Department of General Engineering Disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University, Novocherkassk; e-mail: e_masha@mail.ru

Manuscript received: 28.04.2020. **Revised**: 20.05.2020. **Accepted**: 26.06.2020. **Published online:** 30.06.2020. ©RIOR

Abstract. In this paper, we show in principle a method for solving the problem of a two-dimensional vortex source in terms of flow. The material of the article relates to mathematical modeling of classical two-dimensional problems in terms of potential flows. The resulting solution is similar to the results for a flat vortex source and is an important result for the development of the analytical theory of two-dimensional in terms of potential water flows. Other solutions for real potential two-dimensional flows are considered, which are clarified by the authors, which confirms the relevance of the work.

Keywords: mathematical modeling, differential equations of motion, boundary conditions of the problem, two-dimensional vortex sources, potential water flows, problems of practical hydraulics.

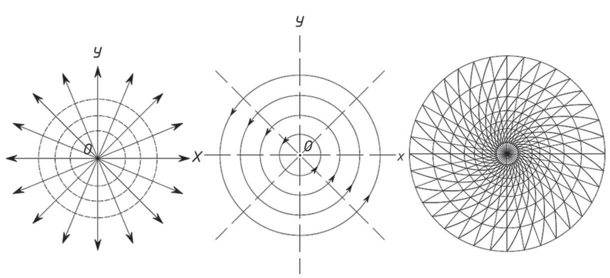
Для течения плоских потенциальных потоков решение этих задач приведено в работе [3] и составляет вклад в классику механики жидкости. Данная работа продолжает цикл работ авторов [4–10].

Цель работы

В настоящей работе рассматривается задача расчета параметров двухмерного вихреисточника как задача, обобщающая «источник» и «вихрь». Поток полагается двухмерным в плане, потенциальным, открытым, стационарным, с горизонтальным дном.

Формулировка задачи (для определенности остановимся на растекании бурного потока)

Поток на радиусе $r = r_0$, глубиной h_0, скоростью под углом γ к окружности растекается как в радиальном направлении, так и в вихревом.



а) б) в)

Рис. 1. Схема течения двухмерного потенциального потока в плане:
а) источник; б) вихрь; в) вихреисточник

Необходимо определить форму траекторий частиц потока и его параметры в любой точке области течения потока XY, т.е. глубины, величины скоростей, угол θ наклона вектора скорости к оси OX.

Для потенциальных двухмерных в плане потоков справедлива следующая система дифференциальных уравнений движения потока в плоскости годографа скорости $\Gamma(\tau, \theta)$ [3; 4]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\tau} = \dfrac{h_0}{2H_0}\cdot\dfrac{(3\tau-1)}{\tau(1-\tau)^2}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}; \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\theta} = 2\dfrac{h_0}{H_0}\cdot\dfrac{\tau}{1-\tau}\cdot\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$\tau = \frac{V^2}{2gH_0} - \tag{2}$$

независимый параметр в плоскости годографа скорости;

θ — угол наклона вектора местной скорости потока к продольной оси симметрии;

$H_0 = \dfrac{V_0^2}{2g} + h_0$ — постоянная в интеграле Д. Бернулли для двухмерных в плане потоков;

h_0, V_0 — глубина и величина скорости в некоторой характерной точке потока;

$\begin{cases} \varphi = \varphi(\tau,\theta) \\ \psi = \psi(\tau,\theta) \end{cases}$ — потенциальная функция и функция тока — зависимые переменные, функции переменных τ, θ;

$$H_0 = \frac{V^2}{2g} + h - \tag{3}$$

интеграл Д. Бернулли.

Из равенств (2), (3) следует, что

$$V = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_0};\ h = H_0(1-\tau); \tag{4}$$

$$F_2 = \frac{2\tau}{1-\tau}. \tag{5}$$

$F_2 = \dfrac{V^2}{gh}$ — критерий Фруда [11].

Для бурных потоков $1 < F_2 < \infty$; $\dfrac{1}{3} < \tau \le 1$ соответственно.

Система уравнений (1) имеет целый спектр аналитических решений [2; 3]. Однако для задачи, поставленной в настоящей работе, выберем из этого спектра следующее решение (конструкцию):

$$\begin{cases} \psi = \dfrac{C_2 H_0}{2h_0}[\ln\tau - \tau] + C_1\theta; \\ \varphi = -\dfrac{C_1 h_0}{2H_0}\left[\ln\dfrac{\tau}{1-\tau} - \dfrac{2}{1-\tau}\right] + C_2\theta, \end{cases} \tag{6}$$

где C_1, C_2 — постоянные, определяемые из граничных условий задачи.

Или

$$\begin{cases} \tilde{\psi} = \dfrac{C_2}{C_1}\dfrac{H_0}{2h_0}[\ln\tau - \tau] + \theta; \\ \tilde{\varphi} = -\dfrac{h_0}{2H_0}\left[\ln\dfrac{\tau}{1-\tau} - \dfrac{2}{1-\tau}\right] + \dfrac{C_2}{C_1}\theta, \end{cases} \tag{6*}$$

где $\bar{\psi} = \frac{\psi}{C_1}$, $\bar{\varphi} = \frac{\varphi}{C_1}$.

Обратим внимание, что часть решения (6)

$$\begin{cases} \psi = C_1\theta \\ \varphi = -\frac{C_1 h_0}{2H_0}\left[\ln\frac{\tau}{1-\tau} - \frac{2}{1-\tau}\right] \end{cases} \quad (7)$$

соответствует течению «источника» радиального двухмерного потока.

Течению «вихря» соответствует решение:

$$\begin{cases} \psi = \frac{C_2 H_0}{2h_0}[\ln\tau - \tau]; \\ \varphi = C_2\theta. \end{cases} \quad (8)$$

А вся конструкция решения (6) соответствует «вихреисточнику». Из равенств (6) определим дифференциалы функций $d\varphi$, $d\psi$. В результате получим:

$$\begin{cases} d\varphi = -\frac{C_1 h_0}{2H_0}\left[\frac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2}\right]d\tau + C_2 d\theta; \\ d\psi = C_1 d\theta + \frac{C_2 H_0}{2h_0}\left[\frac{1-\tau}{\tau}\right]d\tau. \end{cases} \quad (9)$$

Вдоль линии тока $d\psi = 0$ и со второго уравнения системы (9) следует:

$$d\theta = -\frac{C_2 H_0}{2C_1 h_0}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right). \quad (10)$$

Определение линий тока в плоскости годографа скорости

Выберем согласно первому уравнению системы (6) начальную исходную линию тока, полагая

$$\psi = C = 0. \quad (11)$$

Форма любой другой линии тока получается из исходной поворотом ее в плоскости течения потока на некоторый угол.

В плоскости годографа скорости уравнение для начальной линии тока будет следующим:

$$\theta = -\frac{C_2}{C_1}\frac{H_0}{2h_0}[\ln\tau - \tau]. \quad (12)$$

Используя граничные условия

$$\tau_0 = \frac{V_0^2}{2gH_0};\ H_0 = \frac{V_0^2}{2g} + h_0;\ \theta = \theta_0. \quad (13)$$

Из (12) получим:

$$\theta_0 = -\frac{C_2}{C_1}\frac{H_0}{2h_0}\left[\ln\tau_0 - \tau_0\right]. \quad (14)$$

Из равенства (14) определим:

$$\beta = \frac{C_2}{C_1}. \quad (15)$$

Уравнение линий тока в плоскости годографа скорости имеет вид (12).

Параметр β однозначно характеризует процесс растекания потока при заданных V_0, h_0, θ_0.

Определение уравнения линии тока в физической области течения потока

Пользуясь уравнением связи между физической плоскостью течения потока (планом течения потока) и плоскостью годографа скорости $\Gamma(\tau, \theta)$ [4; 5], имеем

$$d(x+iy) = \left(d\varphi + i\frac{h_0}{H_0(1-\tau)}d\psi\right)\cdot\frac{e^{i\theta}}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}}. \quad (16)$$

Разделяя действительную и мнимую части, получим:

$$\begin{cases} dx = \frac{d\varphi\cdot\cos\theta}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}} - \frac{\sin\theta d\psi\cdot h_0}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}\cdot H_0(1-\tau)}; \\ dy = \frac{d\varphi\cdot\sin\theta}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}} + \frac{\cos\theta d\psi\cdot h_0}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}\cdot H_0(1-\tau)}. \end{cases} \quad (17)$$

Полагая в (17) $d\psi = 0$, получим с учетом (10) и (12) систему дифференциальных уравнений для определения линии тока в плане течения потока:

$$dx = \frac{d\varphi\cdot\cos\theta}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}};\quad dy = \frac{d\varphi\cdot\sin\theta}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}}, \quad (18)$$

где

$$\begin{gathered} d\varphi = -\frac{C_1 h_0}{2H_0}\left(\frac{1-3\tau}{\tau(1-\tau)^2}\right)d\tau + C_2 d\theta; \\ d\theta = -\frac{C_2}{C_1}\frac{H_0}{2h_0}\left(\frac{1-\tau}{\tau}\right); \end{gathered} \quad (19)$$

$$\theta = -\frac{C_2}{C_1}\frac{H_0}{2h_0}(\ln\tau - \tau). \qquad (20)$$

Интегрируя (18) с учетом (19), получим для линии тока, проходящей через точку с параметрами τ_0, θ_0 в виде:

$$\begin{cases} x = r_0 + \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varphi^*(\tau)d\tau; \\ y = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \varphi^{**}(\tau)d\tau, \end{cases} \qquad (21)$$

где

$$\phi^*(\tau) = \frac{d\varphi(\tau)\cdot\cos\theta(\tau)}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}};$$

$$\phi^{**}(\tau) = \frac{d\varphi(\tau)\cdot\sin\theta(\tau)}{\tau^{1/2}\sqrt{2gH_0}}.$$

Интегралы в (21) определялись с помощью пакета *MathCad*. Исследование вида траектории (линии тока) приводит к виду, совпадающему с уравнением логарифмической спирали [12]. Задача с учетом формул (6*) решается однозначно. Глубины и скорости при заданном τ определяются по формулам (4). Угол θ определяется по формуле (20).

Более подробное исследование будет проведено в последующих работах.

Выводы

В настоящей работе показывается в принципе метод решения задачи двухмерного в плане течения вихреисточника, материал, который войдет в классику двухмерных в плане потенциальных потоков, аналогично результатам по плоскому вихреисточнику.

Литература

1. *Емцев Б.Т.* Двухмерные бурные потоки [Текст] / Б.Т. Емцев. — М.: Энергоиздат, 1967. — 212 с.
2. Справочник по гидравлике [Текст] / под ред. В.А. Большакова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Киев: Выща школа, 1984. — 343 с.
3. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. — 5-е изд. — М.: Наука, 1978. — 736 с.
4. *Коханенко В.Н.* Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общ. ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. — 168 с.
5. *Коханенко В.Н.* Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, М.А. Лемешко, Н.Г. Папченко; под общей ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. — 180 с.
6. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Two-dimensional motion equations in water flow zone // (2019) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 698(6), 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
7. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions // (2019) AIP Conference Proceedings 2188, 050017. DOI: 10.1063/1.5138444.
8. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Solution of equation of extreme streamline with free flowing of a torrential stream behind rectangular pipe // (2020) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 775 (1), 012134. DOI: 10.1088/1757-899X/775/1/012134.
9. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Solution of Equations of Motion of Two-Dimensional Water Flow // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 3. P. 5–12. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-3-5-12.
10. *Kokhanenko V.N., Burtseva O.A., Evtushenko S.I., Kondratenko A.I., Kelekhsaev D.B.* Two-Dimensional in Plan Radial Flow (NonPressure Potential Source) // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 4. P. 74–78. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-4-74-78.
11. *Штеренлихт Д.В.* Гидравлика [Текст] / Д.В. Штеренлихт. — 3-е изд., перераб. — М.: Колос, 2005. — 656 с.
12. *Корн Г.* Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1970. — 720 с.

References

1. Emcev B.T. *Dvuhmernye burnye potoki* [Two-dimensional stormy streams]. Moscow: Energoizdat Publ., 1967. 212 p.
2. *Spravochnik po gidravlike* [Handbook on hydraulics]. Kiev: Vyshcha shkola Publ., 1984. 343 p.
3. Lojcyanskij L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow: Nauka Publ., 1978. 736 p.
4. Kohanenko V.N. *Modelirovanie odnomernyh i dvuhmernyh otkrytyh vodnyh potokov* [Modeling of one-dimensional and two-dimensional open water flows]. Rostov-on-Don: YuFU Publ., 2007. 168 p.
5. Kohanenko V.N. *Modelirovanie burnyh dvuhmernyh v plane vodnyh potokov* [Modeling of turbulent two-dimensional in terms of water flows]. Rostov-on-Don: YuFU Publ., 2013. 180 p.
6. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Two-dimensional motion equations in wa-

ter flow zone // (2019) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 698(6), 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
7. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions // (2019) AIP Conference Proceedings 2188, 050017. DOI: 10.1063/1.5138444.
8. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Solution of equation of extreme streamline with free flowing of a torrential stream behind rectangular pipe // (2020) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 775 (1), 012134. DOI: 10.1088/1757-899X/775/1/012134.
9. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Solution of Equations of Motion of Two-Dimensional Water Flow // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 3. P. 5–12. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-3-5-12.
10. Kokhanenko V. N., Burtseva O.A., Evtushenko S.I., Kondratenko A.I., Kelekhsaev D.B. Two-Dimensional in Plan Radial Flow (NonPressure Potential Source) // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 4. P. 74–78. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-4-74-78.
11. Shterenliht D.V. *Gidravlika* [Hydraulics]. Moscow: Kolos Publ., 2005. 656 p.
12. Korn G. *Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 720 p.