Организационно-технологическое моделирование эксплуатации инженерных систем зданий с позиций стоимостного критерия систем обслуживания с перерывами

УДК 624.05

Афанасьев Григорий Александрович
Доцент, к.э.н., доцент кафедры «Жилищно-коммунального комплекса» ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (г. Москва),
e-mail: AfanasievGA@mgsu.ru

Статья получена: 22.09.2022. Рассмотрена: 25.09.2022. Одобрена: 27.09.2022. Опубликована онлайн: 27.09.2022.

Аннотация: В последние годы наблюдается повышенной интерес к применению вероятностных методов, в частности. теории массового обслуживания, к оценке эффективности деятельности управляющих компаний при организации эксплуатации технических систем жилых зданий.

В статье Рассмотрена система обслуживания M|G|1 с возможностью перерывов в работе ремонтных бригад для основных требований, когда, например, ремонтные бригады работают по сторонним заказам. Решается задача оптимизации с позиций стоимостного критерия. В качестве контролируемых факторов предлагается вероятность осуществления перерыва α и его продолжительность. В достаточно общих предположениях относительно поведения системы на перерывах установлено, что оптимальное значение вероятности α либо ноль, либо единица. Приводятся необходимые и достаточные условия, при которых перерыв следует осуществлять, т.е. $\alpha = 1$. При постоянной продолжительности перерывов определены условия, при которых $\alpha = 1$, а продолжительность перерыва оптимальна.

Ключевые слова: системы обслуживания, перерывы в обслуживании, стационарное распределение, прерывания перерывов

1. Актуальность работы и ее цель

Рассматриваются системы обслуживания, в которых прибор в моменты освобождения системы от требований на некоторые промежутки времени становится недоступным для обслуживания (далее под прибором имеем в виду – бригаду ремонтников). Эти промежутки назовем перерывами. Изучение таких систем началось достаточно давно (см., например, [1]), но в последние годы интерес к ним существенно возрос. Отметим также и оригинальность методов и подходов к анализу моделей данного класса, что способствовало развитию самой теории очередей. Достаточно полный и содержательный обзор литературы дан в работах [2 - 6].

Получены необходимые и достаточные условия, при которых прибор следует сдавать в аренду (далее будем считать, прибор сдается в аренду – бригада

OPTIMIZATION OF THE ORGANIZATION OF ENGINEERING SYSTEMS OF BUILDINGS FROM THE STANDPOINT OF THE COST CRITERION OF SERVICE SYSTEMS WITH INTERUPTIONS

Afanasiev Grigori Aleksandrovich
Associate Professor, National Research University Moscow State University of Civil Engineering (NRU MGSU), Moscow, Russia,
e-mail: AfanasievGA@mgsu.ru

Abstract: In recent years, there has been an increased interest in the application of probabilistic methods, in particular. the theory of queuing, to the evaluation of the effectiveness of the activities of management companies in the organization of the operation of technical systems of residential buildings.

The article considers the M|G|1 service system with the possibility of breaks in the work of repair teams for basic requirements, when, for example, repair teams work on third-party orders. The optimization problem is solved from the point of view of the cost criterion. As controlled factors, the probability of a break and its duration are proposed. Under fairly general assumptions about the behavior of the system at breaks, it is established that the optimal value of the probability is either zero or one. Necessary and sufficient conditions are given under which a break should be implemented, i.e. =1. With a constant duration of breaks, the conditions are determined under which =1, and the duration of the break is optimal.

Keywords: queueing system, scheduled prophylactic inspection, residential building, vacation

ремонтников работает на сторонних заказах). Находится оптимальное значение продолжительности аренды. Приводятся условия на параметры модели, включая продолжительность аренды, при которых контракт следует заключать, т.е. α = 1.

2. Постановка проблемы и описание модели.

Перерыв в обслуживании может быть следствием многих факторов. Например, он может быть использован для профилактического осмотра и ремонта оборудования, обеспечивающих требуемый уровень его надежности. Возможно также, что владелец оборудования (прибора) не желает его длительных простоев, что приносит определенные убытки, и сдаст его в аренду, когда нет запросов на обслуживание. Именно эта ситуация рассматривается в данной статье.

Возникает вопрос, с какой вероятностью и на какое время следует заключать контракт об аренде, чтобы достичь максимума математического ожидания доходов в единицу времени. Сначала предполагается, что в момент освобождения системы от обслуживания требований прибор сдастся в аренду на случайное время η с функцией распределения *G(x)* с вероятностью a.

Прибыль от одного контракта составляет сумму C_1, которая, разумеется, зависит от функции *G(x)*, а убытки от ожидания одного требования в единицу времени равны C_2. На основе результатов статьи [7] находится целевая функция и выясняется, что оптимальное α равно либо нулю, либо единице.

В работе рассматривается одноканальная система обслуживания с пуассоновским входящим потоком *X* интенсивности λ, неограниченным числом мест для ожидания и произвольно распределенным с функцией распределения *B(x)* временем обслуживания, т.е. в символике Кендалла система $M|G|l|\infty$. В момент, когда система освобождается от имеющегося в ней требований, прибор с вероятностью α становится недоступным для обслуживания требований, т.е. уходит на перерыв или сдастся в аренду на случайное время η с функцией распределения *G,* а с вероятностью 1 – α прибор остается свободным вплоть до поступления следующего требования потока *X.*

Если после перерыва в системе нет требований, то с вероятностью a начинается новый перерыв, а с вероятностью 1 – α прибор остается свободным и ждет поступления нового требования потока *X*. Решение о следующем перерыве принимается после завершения нового периода занятости. В течение перерыва в систему продолжают поступать требования. Обозначим $Y_n(t)$ – число требований в системе через время *t* после начала *n*-го перерыва продолжительности η_n. Заметим, что $Y_n(t)$ не обязательно имеет неубывающие траектории, поскольку в течение перерыва возможно обслуживание требований. Подобная ситуация рассматривалась, например, в работах [7]-[13]. Считаем, что все случайные величины и процессы, определяющие функционирование системы (времена обслуживания, продолжительности перерывов, процессы *X* и Y_n,) независимы. От одной сдачи в аренду, т.е. от одного перерыва, владелец оборудования получает прибыль размера C_1, а за пребывание в системе одного требования в единицу времени выплачивает сумму C_2. Наша первая задача – найти значение α, при котором математическое ожидание дохода в единицу времени будет максимальным. Далее описанную систему обозначим S_α.

3. Операционные характеристики системы S_α.

Считаем, что заданы следующие функции

$$V(z,t) = Ez^{Y(t)} \parallel (\eta > t) = \sum_{j=0}^{\infty} z^j P(Y(T) = j, \eta > t),$$

$$\text{G(z,s)}= Ez^{Y(\eta)}e^{-s\eta}, G(1,s) = g(s0 = Ee^{-s\eta},$$

$$C(z) = G(z,0) = z^{Y(\eta)}, |z| \leq 1, \text{Re } s \geq 0$$

а также положим

$$\eta = E\eta, Y_1 = EY(\eta), Y_2 = EY^2(\eta), \delta = \int_0^{\infty} Ez^{Y(t)} \parallel (\eta > t)dt.$$

Здесь и далее для членов последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин или векторов опускаем индекс *n*. В исследовании системы S_α мы будем опираться на результаты для системы S_1 с α = 1, полученные в работе [7, теоремы 2 и 3]. Пусть число требований в системе S_α в моменты *t*. Предположим, что первое решение о перерыве будет приниматься в момент T_1^α окончания первого периода занятости, т.е.

$$T_1^\alpha = min\left\{t > 0: q(t) = 0, \max_{0 \leq s < t} q(s) > 0\right\}$$

Аналогично определим T_n^α как *n*-ый момент принятия решения об осуществлении перерыва и пусть α_n - время до прихода следующего требования, т.е. скачка процесса X после T_n^α. Введем событие A_n, состоящее в том, что в момент T_n^α начинается перерыв гак, что $P(A_n) = \alpha$ и $(\bar{A}_n) = 1 - \alpha$.

Введем последовательности независимых случайных величин

$$: \eta_n \parallel (\bar{A}_n), Y_n^\alpha(\eta_n^\alpha) = Y_n(\eta_n) \parallel (A_n) + \parallel (\bar{A}_n)$$

и последовательность независимых процессов

$$Y_n^\alpha(t) = Y_n(t) \parallel (A_n) \text{ при } t \le \eta_n.$$

Рассмотрим теперь систему $\tilde{S}_\alpha$ в которой перерывы возникают с вероятностью единица после окончания периода занятости, либо после предыдущего перерыва, если в системе нет требований. При этом продолжительность перерыва и число требований в его конце определяются равенствами (3), а число требований в системе через время / после начала перерыва дается равенством (4). Пусть $\tilde{q}_\alpha(t)$ — число требований в системе $\tilde{S}_\alpha$ в момент t. Тогда очевидно, что по распределению = $\tilde{q}_\alpha(t)$= $q_\alpha(t)$, а система $\tilde{S}_\alpha$— эго система S_1 с $\{\eta_n^\alpha\}_{n=1}^\infty$, вместо $\{Y_n^\alpha(\eta_n^\alpha)\}_{n=1}^\infty$ и $\{Y_n^\alpha(t)\}_{n=1}^\infty$ вместо $\{\eta_n\}_{n=1}^\infty$, $\{Y_n^\alpha(\eta_n)\}_{n=1}^\infty, \{Y_n^\alpha(t)\}_{n=1}^\infty$. Чтобы воспользоваться результатами, полученными для системы S_1 [7], надо вычислить функции (1) и константы (2) для системы $\tilde{S}_\alpha$, опираясь на формулы (3) и (4).

Несложные выкладки дают следующее равенства.

$$V_\alpha(z,t) = Ez^{Y^\alpha(t)} \parallel (\eta_\alpha > t) = Ez^{Y^\alpha(t)} \parallel (\eta_\alpha > t, \bar{A}$$

$$= (1-\alpha)e^{-\lambda t} + \alpha V(z,t),$$

$$G_\alpha(z,s) = Ez^{Y^\alpha(\eta^\alpha)}e^{-s\eta_\alpha} = (1-\alpha)\frac{\lambda z}{\lambda + s} + \alpha G(z,s$$

$$G_\alpha(z) = Ez^{Y^\alpha(\eta^\alpha)} = (1-\alpha)z = \alpha C(z).$$

Используя (3) и (5), получаем

$$E\eta^\alpha = \eta^{-\alpha} = \frac{1-\alpha}{\lambda} + \alpha\bar{\eta},$$

$$Y_1^\alpha = EY^\alpha(\eta^\alpha) = C'_\alpha(1) - 1 - \alpha + \alpha Y_1,$$

$$C''_\alpha(1) = Y_2^\alpha - Y_1^\alpha,$$

$$\int_0^\infty EY^\alpha(t) \parallel (\eta^\alpha > t)dt = \left(\frac{\partial}{\partial z}\int_0^\infty V_\alpha(z,t)dt\right)_{z=1} = \alpha\int_0^\infty EY(t)$$

$$\parallel (\eta > t)dt = \alpha\delta$$

Теперь, используя Теорему 2 из [7] для функции $\pi(z) = \lim_{t\to\infty} Ez^{q9t)}$ для системы S_1, можно найти $\pi_\alpha(z) =$ $= \lim_{t\to\infty} Ez^{q_0(t)}$. Достаточно взять $\bar{\eta}^\alpha$, $Y_1, V(z,t), C(z)$ вычисленные по формулам (6), (5), вместо $\eta_1, Y_1, V(z,t), C(z)$.

Теорема 1 Если $\rho = \lambda b < \infty$ и $E\eta$, то существует

$$\lim_{t\to\infty} E\, z^{q_0(t)} = \pi_\alpha(z) = \frac{1-\rho}{1-\alpha\gamma}\Big[1 - \alpha + \lambda\alpha\int_0^\infty V(z,t)dt +$$

$$\frac{z(1-(1-\alpha)z - \alpha C(z))}{1-z}\cdot\frac{1-\beta(\lambda(1-z))}{\beta(\lambda(1-z))-z}\Big],$$

где

$$\gamma = 1 - \lambda\bar{\eta}(1-\rho) - \rho Y_1, \beta(s) = \int_0^\infty e^{-sx}dB(x)(Res < 0).$$

Аналогично из Теоремы 3 в [7], используя формулы (6) и (7), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $\rho = \lambda b < 1, E(Y(\eta))^2 = Y_2 < \infty, b_2 =$

$Y_2 < \infty, b_2 = \int_0^\infty x^2 dB(x) < \infty.$

Тогда

$$\bar{q}_\alpha = \lim_{t\to\infty} Eq_\alpha(t) = \frac{\alpha}{1-\alpha\gamma}\left(\lambda(1-\rho)\delta + \frac{\rho(Y_2 - Y_1)}{2} - (1 - Y_1)\bar{q}_0\right) + \frac{\bar{q}_0}{1-\alpha\gamma}$$

где δ, γ определены соответственно в (7) и (9), а

$$\bar{q}_0 = \rho + \frac{\lambda^2 b_2}{2(1-\rho)}.$$

Очевидно, (см., например, [14]), q_0 среднее число требований в системе M|G|1 без прерываний в стационарном режиме. Предполагая, что Y - пуассоновский процесс с интенсивностью λ, не зависящий от η, а α — 1, из (10)

Имеем

$$Eq_1 = \rho + \frac{\lambda E\eta^2}{2\bar{\eta}} + \frac{\lambda^2 b_2}{2(1-\rho)}$$

Что совпадает с результатами из [7]. Еще одной важной операционной характеристикой системы S_α является математическое ожидание $H_\alpha(t)$ числа осуществленных перерывов за время t. Пусть $t_n^\alpha = T_{n+1}^\alpha$-$T_n^\alpha$ $(n = 1,2 \ldots$- временной интервал между *(n + 1)*-м и *n*-м моментами принятия решений об осуществлении перерывов. Тогда $\{t_n^\alpha\}_{n=1}^\infty$ - последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин и если τ - последовательность интервалов между моментами осуществлений перерывов, то по распределению $t_1^\alpha = t_1^\alpha + t_2^\alpha + \cdots + t_{\zeta_1^\alpha}^\alpha$ где ζ_1^α — геометрически распределенная случайная величина, т.е. , (j-1,2,...). Поскольку ζ_1^α не зависит от $\{t_n^\alpha\}_{n=1}^\infty$и $E\zeta_1^\alpha = \frac{1}{\alpha}$, по тождеству Вальда имеем

$$\text{E}\tau_n^\alpha = \text{E}\tau_1^\alpha = Et^\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}, (n = 1,2,\ldots)$$

Заметим, что для системы $\tilde{S}_\alpha$ в момент T_n^α начинается *n*-ый перерыв и его продолжительность $t\eta_n^\alpha$ определяется формулой (3). Из формулы (2) в статье [7] имеем

$$Et^\alpha = \bar{t}^\alpha = \bar{\eta}^\alpha + \frac{b}{1-\rho}Y_1^\alpha$$

Теперь из (9) и (6) находим

$Et^{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\lambda} + \alpha\bar{\eta} + \frac{b}{1-\rho}(1-\alpha+\alpha Y_1) = \frac{1-\alpha}{\lambda(1-\rho)} + \alpha\Big(\bar{\eta} +$

$+ \frac{b}{1-\rho}Y_1\Big) = \frac{1-\alpha\gamma}{\lambda(1-\rho)}$

Заметим, что $\bar{\eta} + \frac{b}{1-\rho}Y_1 = \bar{\tau}$ · средний интервал между перерывами в системе S_1 с $\alpha = 1$.

Для функции $H_{\alpha}(t)$ в соответствии с элементарной теоремой восстановления (см., например, [15]) из (12) и (14) получаем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{H_{\alpha}(t)}{t} = \frac{1}{E\tau^{\alpha}} = \frac{\alpha\lambda(1-\rho)}{1-\alpha\gamma}$$

где γ определено (9).

4. Оптимальное значение вероятности о осуществления перерыва

Здесь мы найдем вероятность α0 осуществления перерыва (или сдачи прибора в аренду), при которой математическое ожидание прибыли в единицу времени в стационарном режиме (функционирования системы будет максимальным. Пусть $W(\alpha,t)$ - математическое ожидание прибыли за время t в системе S_{α} с вероятностью α осуществления перерыва. Тогда $W(\alpha,t)$ разность средних доходов от осуществленных перерывов и расходов, связанных с пребываниями требований в системе. В соответствии с обозначениями пункта 3 имеем

$$W(\alpha,t) = C_1 H_{\alpha}(t)\int_0^t Eq_{\alpha}(y)dy\,.$$

Средний доход в единицу времени в стационарном процессе в силу (10), (15) и (16), определяется равенство

$$W(\alpha) = \frac{\alpha(C_1\lambda(1-\rho) - C_2 D_1) - C_2\bar{q}_0}{1-\alpha\gamma}$$

где

$$D_1 = \lambda(1-\rho)\delta + \frac{\rho(Y_2 - Y_1)}{2} - (1 - Y_1\bar{q}_0)$$

Надо найти максимум функции при а . Полагая

$$A = C_1\lambda(1-\rho) - C_2 D_1, B = C_2\bar{q}_0,$$

имеем

$$W(\alpha) = \frac{A\alpha - B}{1-\alpha\gamma}.$$

Поскольку $W'(\alpha) = \frac{A-\gamma B}{(1-\alpha\gamma)^2}$, то при $A > \gamma B$ функция $W(\alpha)$ монотонно возрастет и оптимальным решением является $\alpha_0 = 1$. Если $A < \gamma B$, то $W(\alpha)$ монотонно убывает и оптимальное решение $\alpha_0 = 0$. При функция $W(\alpha)$ = — B и не зависит от α. Далее будем считать, что в этом случае $\alpha_0 = 0$.

С учетом (19) получим следующее утверждение.

Теорема 3 В условиях теоремы 2, если

$$C_1 > \frac{C_2(\gamma\bar{q}_0 + D_1)}{\lambda(1-\rho)}$$

то с позиций стоимостного критерия перерыв в системе S_{α} следует осуществлять с вероятностью α_0 = = 1. В противном случае перерывы не допускаются.

Как пример рассмотрим ситуацию, когда Y - пуассоновский процесс интенсивности λ, а Y и η независимы. Тогда $\gamma = 1 - \lambda\bar{\eta}$, $D_1 = \frac{\lambda^2}{2}E\eta^2 - \gamma\overline{q_0}$=1 и, условие (20) принимает вид

$$C_1 > \frac{C_2\lambda E\eta^2}{2(1-\rho)}$$

Заключение

В достаточно общих предположениях относительно поведения системы на перерывах установлено, что оптималь е значение вероятности осуществления перерыва α либо ноль, либо единица. Выявлены необходимые и достаточные у целесообразности осуществлять перерыв, т.е. $\alpha = 1$. При постоянной продолжител ерерывов определены условия, при которых $\alpha = 1$, а продолжительность перерыва оптимальна.

Литература

1. Levy Y. and Yediial U. Utilization of idle time in an M/G/1 queuing system. Management Science, 22, 209-211, 1975.
2. Doshi B.T. Queueing systems with vacations - a survey. Queueing Syst., 1:1, 29-66, 1986.
3. Doshi B.T. Single-server queues with vacations, Stochastic analysis of computer and communications systems, Noth-Holland, Amsterdam, 217-265, 1990.
4. Takagi H. Queueing Analysis: A Foundation of Performance Analysis. Vol.
1: Vacation and Priority Systems, Part 1, North-Holland Publishing Co. Amsterdam, 1997.
5. Tain N., Zhang Z.G. Vacation Queueing Models: Theory and Applications, In tern at. Ser. Op er. Res. management Sd. 93, Springer, New York, 2006.
6. Servi L.D., Finn S.G. M/M/l queue with working vacations (A/|A|l|WV), Performance Evaluation, 50:1, 41-52, 2002.
7. Афанасьев Г.А. Система ;W|G|1 с перерывами в работе прибора и их задержками. Теория вероятн. и ее примен., 66:1, 3-19, 2021.
8. Li J., Tian N. The M/M/1 queue with working vacations and vacation interruption, J. Syst. Sd. Syst. Eng., 16, 121-127, 2007.
9. Li J., Tian N., Ma Z. Performance analysis of G1|A/|1 queue

with working vacations and vacation interruptions, Appl. Math. Model., 32:12, 2715-2730, 2008.
10. Zhang M., Hou Z. Performance analysis of queue with working vacations and vacation interruptions, J. Coinput. Appl. Math., 234:10, 2977- 2985, 2010.
11. Srernivasang C., Chadiavarthy S.R., Krishnamoorthy A. MAP/PЯ/1 queue with working vacations, vacation interruptions and A^r-policy, Appl. Math. Model., 37:6, 3879-3893, 2013.
12. Ibe O.C., Isiola O.A. Л/|Л/|1 multiple vacation queueing systems with differential vacations, Model. Simul. Eng., 158247, 2014.
13. Ibe O.C., A/|G|1 vacation queueing system with server timeout . Amer. S. Oper. Res., 5:2, 77-88, 2015.
14. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массовою обслуживания, Изд. 3-е, Москва, КомКнига, 2005.
15. Кокс Д.Р., Смит В.Л. Теория восстановления, Москва, «Советское радио 1967.