Решение задачи растекания двухмерного в плане нестационарного потенциального потока (радиальный источник)

УДК 532.5 : 004.942

Бурцева О.А.
Канд. техн. наук, доцент кафедры общеинженерных дисциплин, ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: kuzinaolga@yandex.ru

Коханенко В.Н.
Д-р техн. наук, профессор кафедры общеинженерных дисциплин, ФГБОУ ВО «Южно-Российский государственный политехнический университет (НПИ) имени М.И. Платова» (г. Новочеркасск); e-mail: victorkohanenko@yandex.ru

Евтушенко С.И.
Д-р техн. наук, профессор, почетный работник высшего образования Российской Федерации, советник РААСН, член РОМГГиФ, профессор кафедры «Информационные системы, технология и автоматизация строительства», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (г. Москва); e-mail: evtushenkosi@mgsu.ru

Кондратенко А.И.
Канд. техн. наук, доцент кафедры инженерных конструкций, ФГБОУ ВО «Российский государственный аграрный университет — МСХА им. К.А. Тимирязева» (г. Москва)

Статья получена: 22.05.2020. Рассмотрена: 25.06.2020. Одобрена: 27.06.2020. Опубликована онлайн: 30.06.2020. ©РИОР

Аннотация. Выведены уравнения движения нестационарного радиального потока, поставлена краевая задача и получено ее аналитическое решение. Решение задачи в работе хорошо согласуется с экспериментальными параметрами, полученными на экспериментальной установке при малых возмущениях. Получены уравнения определения высоты фронта волны, которая уменьшается вниз по течению потока, а мгновенная скорость фронта волны при этом стремится к нулю.

Ключевые слова: математическая модель, двухмерный радиальный источник, нестационарный радиальный поток, свободное растекание потока, уравнения движения, отводящее русло, условие неразрывности потока.

THE SOLUTION TO THE TASK OF SPREADING THE NON-STATIONARY TWO-DIMENSIONAL POTENTIAL FLOW (THE RADIAL SOURCE)

Olga Burtseva
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of General Engineering Disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk;
e-mail: kuzinaolga@yandex.ru
Viktor Kokhanenko
Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of General Engineering Disciplines, Platov South-Russian State Polytechnic University (NPI), Novocherkassk
Sergey Evtushenko
Doctor of Technical Sciences, Professor, Honored Worker of Higher Education of Russia, Council of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences, Department “Information systems, technologies and construction automation”, Moscow State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow; e-mail: evtushenkosi@mgsu.ru
Anatoliy Kondratenko
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Engineering Structures, Russian State Agrarian University — Moscow Timiryazev Agricultural Academy, Moscow

Manuscript received: 22.05.2020. **Revised**: 25.06.2020. **Accepted**: 27.06.2020. **Published online:** 30.06.2020. ©RIOR

Abstract. The equations of motion of a non-stationary radial flow are derived, the boundary value problem is set, and its analytical solution is obtained. The solution of the problem in this paper is in good agreement with the experimental parameters obtained at the experimental setup for small perturbations. The equations for determining the height of the wave front that decreases downstream of the flow are obtained, and the instantaneous velocity of the wave front tends to zero.

Keywords: mathematical model, two-dimensional radial source, unsteady radial flow, free flow spreading, equations of motion, diverting channel, flow continuity condition.

Актуальность работы. В известной технической литературе [1–5] приведено решение граничной задачи радиального растекания плоского стационарного потенциального потока несжимаемой жидкости. Однако определенное значение для теории и практики течения водных потоков имеет решение задачи радиального нестационарного потенциального течения двухмерного в плане потока (двухмерный радиальный источник). Решение этой задачи для авторов является первым шагом к решению задачи свободного растекания потока за безнапорными отверстиями в широкое отводящее русло (задача с заранее неизвестными границами) и базируется на более ранних работах [6–10].

Целью работы является вывод уравнений движения нестационарного радиального потока, постановка краевой задачи и получение ее аналитического решения.

Уравнения движения потока

Нестационарный поток. В случае радиального двухмерного в плане потенциального источника уравнения движения потока следуют из общих уравнений течения двухмерных в плане потоков [11–13].

Полагая, что окружная скорость потока $V_\theta = 0$ при радиальном растекании потока, уравнение движения потока, следующее из второго закона Ньютона применительно к движению жидкости, запишется в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + g\frac{\partial h}{\partial r} = 0, \tag{1}$$

где u — местная радиальная (полная) скорость потока; t — время; r — текущий радиус; g — ускорение свободного падения. Схема радиального растекания потока приведена на рис. 1.

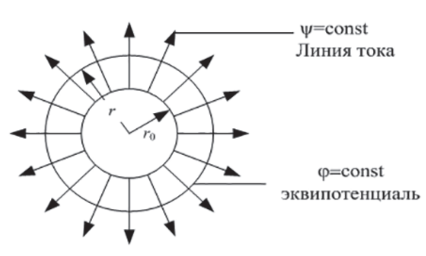

Рис. 1. Вид радиального расширения потока в плане: r_0 — радиус начальной окружности; r — текущий радиус, линии тока y = const направлены по радиусу

Уравнение неразрывности потока в цилиндрической системе координат принимает вид:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial (ruh)}{\partial r} = 0. \tag{2}$$

Система уравнений (1), (2) является системой уравнений в частных производных относительно функций:

$$u = (r, t);\ h = h(r, t).$$

Стационарный поток. Для стационарного потока глубина и скорость не зависят от времени, поэтому $u = u(r)$; $h = h(r)$, а система (1), (2) в этом случае упрощается к виду:

$$\begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial r} + g\dfrac{\partial h}{\partial h} = 0; \\ 2\pi rhu = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где Q — объемный расход потока.

В случае потенциального течения потока существует потенциальная функция $u(r)$ такая, что

$$u\frac{\partial \varphi}{\partial r}.$$

Из системы (3) следует система уравнений [3]

$$\begin{cases} \dfrac{u^2}{2g} + h = H_0; \\ 2\pi rhu = Q, \end{cases} \tag{4}$$

где $H_0 = \dfrac{u_0^2}{2g} + h_0$ — константа в уравнении Д. Бернулли для двухмерных в плане потоков.

Граничная задача для стационарного потока. Система уравнений (4) дополняется граничными условиями:

$$r = r_0;\ h = h_0;\ u = u_0,$$

при этом остановимся на случае растекания бурного потока[1]:

$$F_0 = \frac{u_0^2}{gh_0} > 1.$$

[1] Бурный поток – высокоскоростной поток при числах Фруда $F_0 > 1$ [9; 10].

Решение граничной задачи. Вводя параметр $\tau = \dfrac{u^2}{2gH_0}$, зависящий от скорости «u», в работах [2; 3] получено аналитическое решение задачи (3) в виде:

$$u^{ст} = \tau^{1/2}\sqrt{2gH_0},\ h^{ст} = H_0(1-\tau),$$
$$r = \frac{r_0\tau^{1/2}(1-\tau_0)}{\tau^{1/2}(1-\tau)}, \tag{5}$$

где $\tau_0 = \dfrac{u_0^2}{2gH_0}$; $\tau_0 \le \tau \le 1$ — для бурного потока.

Анализ решения граничной задачи. Из формул (5) следует, что при растекании бурного потока скорость u увеличивается вниз по течению потока от значения u_0 до величины $u_{max} = \sqrt{2gH_0}$, а глубина потока падает вниз по течению потока от h_0 до нуля на бесконечности. Параметры u, h изменяются монотонно при увеличении параметра «τ». Значения параметров u, h остаются постоянными на эквипотенциалях, т.е. на окружностях постоянного радиуса.

Нестационарное течение потока. Пусть при $r = r_0$, $t = t_0$ заданы $h_0^{ст}$, $u_0^{ст}$ — начальные стационарные значения глубины и скорости потока, тогда при $r = r_0$, $t > t_0$

$$h_0 = h_0^{ст} + \tilde{h}_0;\ u_0 = u_0^{ст} + \tilde{u}_0, \tag{6}$$

где $\tilde{h}_0$, $\tilde{u}_0$ — возмущения к начальному состоянию.

Тогда течение потока будет представлять собой поток с телом волны (рис. 2).

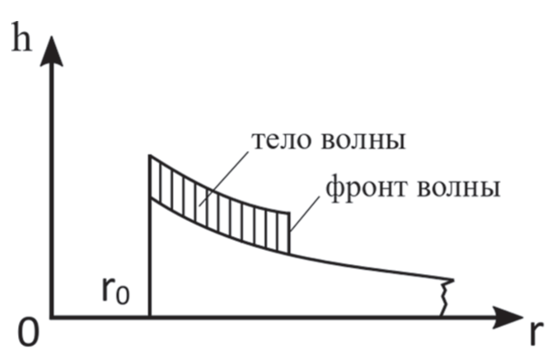

Рис. 2. Схема к течению нестационарного потока

При $t > t_0$ решение нестационарной задачи представим в виде:

$$u = u^{ст} + \tilde{u};\ h = h^{ст} + \tilde{h}, \tag{7}$$

где $\tilde{u}$, $\tilde{h}$ — добавки к скорости — $u_{ст}$ и к глубине — $h_{ст}$; а значения u, h определяем из системы уравнений:

$$u = \tau^{1/2}\sqrt{2gH(t)};\ h = H(t)(1-\tau);$$
$$r = \frac{r_0\tau^{1/2}(1-\tau_0)}{\tau^{1/2}(1-\tau)};\ \tau_0 = \frac{u_0^2}{2gH(t)} \tag{8}$$

где $H(t) = \dfrac{u_0^2}{2g} + h_0$; $Q(t) = 2\pi r u_0 h_0 = Q_0$ с учетом условий (6).

Приведение решений (7) и (8) к единому радиусу «r». Из уравнений (7) и (8) следует уравнение относительно «τ» в пределах тела волны:

$$\frac{\sqrt{\tau_0^{ст}}\left(1-\tau_0^{ст}\right)}{\sqrt{\tau^{ст}}\left(1-\tau^{ст}\right)} = \frac{\sqrt{\tau_0}\left(1-\tau_0\right)}{\sqrt{\tau}(1-\tau)}. \tag{9}$$

Уравнение (9) представляет собой кубическое уравнение относительно «τ». Решая его стандартными методами, определим искомый корень $\tau^{ст} = f_1(r)$ в интервале $\tau_0 \le \tau \le 1$ и далее из системы (8) определяем u и h.

Тогда в пределах тела волны из (7) следует выражение для добавок:

$$\tilde{u} = u - u^{ст};\ \tilde{h} = h - h^{ст},$$

где $\tilde{h}$ — глубина фронта волны.

Определение скорости течения волны в потоке. Согласно теории малых возмущений [1; 11] по формуле Лагранжа [14] скорость фронта волны относительно стационарного потока равна:

$$C = \sqrt{gh^{ст}}.$$

Так как

$$C = \frac{dr}{dt} = \sqrt{gh_{ст}}, \tag{10}$$

выразим из уравнения (5) $h_{ст}$ как функцию радиуса r: $h^{ст} = f_2(r)$.

Значение $h^{ст}$ подставляем в уравнение (10) и, разделяя переменные, получаем дифференциальное уравнение:

$$\frac{dr}{\sqrt{gf_2(r)}} = dt. \tag{11}$$

Интегрируя уравнение (11), получаем функцию

$$\Phi(r) = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{\sqrt{gf_2(r)}} = t.$$

Вычисления производим с использованием пакета прикладных программ *Mathcad*.

Таким образом вычислены:

- средняя скорость фронта волны относительно потока

$$u_{\text{в}}^{\text{ср}} = \frac{r}{t},$$

из которой можно определить время добегания волны до заданного радиуса;

- мгновенная скорость фронта волны

$$C_{\text{в}} = \sqrt{gh^{\text{ст}}}.$$

- скорость течения фронта волны с учетом скорости потока

$$C_{\text{в}}^{*} = C_{\text{в}} + u,$$

где u — скорость потока.

Выводы

1. Решение задачи в работе хорошо согласуется с экспериментальными параметрами, полученными на экспериментальной установке при малых возмущениях $\frac{\Delta Q}{Q_{\text{ст}}} \le 5\%$.
2. При $\tau \to 1$; $r \to \infty$; $u \to u_{\max} = \sqrt{2gH(t)}$; $h \to 0$ высота фронта волны уменьшается вниз по течению потока, мгновенная скорость фронта волны $C_{\text{в}}^{*}$ стремится к нулю при $r \to \infty$; $\tau \to 1$.

Литература

1. *Емцев Б.Т.* Двухмерные бурные потоки [Текст] / Б.Т. Емцев. — М.: Энергия, 1967. — 212 с.
2. *Коханенко В.Н.* Моделирование бурных двухмерных в плане водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, В.Я. Волосухин, М.А. Лемешко, Н.Г. Папченко; под общ. ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2013. — 180 с.
3. *Коханенко В.Н.* Моделирование одномерных и двухмерных открытых водных потоков [Текст]: монография / В.Н. Коханенко, Я.В. Волосухин, В.В. Ширяев, Н.В. Коханенко; под общей ред. В.Н. Коханенко. — Ростов н/Д: Изд-во ЮФУ, 2007. — 168 с.
4. Справочник по гидравлике [Текст] / под ред. В.А. Большакова. — 2-е изд., перераб. и доп. — Киев: Вища школа, 1984. — 343 с.
5. *Высоцкий Л.И.* Совершенствование методов гидравлических расчетов водопропускных и очистных сооружений [Текст] / Л.И. Высоцкий. [Сборник]: межвуз. науч. сб.; редкол. Л.И. Высоцкий и др. — Саратов: Изд-во Саратовского гос. техн. ун-та, 1994. — 94 с.
6. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Two-dimensional motion equations in water flow zone // (2019) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 698(6), 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
7. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions // (2019) AIP Conference Proceedings 2188, 050017. DOI: 10.1063/1.5138444.
8. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Solution of equation of extreme streamline with free flowing of a torrential stream behind rectangular pipe // (2020) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 775 (1), 012134. DOI: 10.1088/1757-899X/775/1/012134.
9. *Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I.* Solution of Equations of Motion of Two-Dimensional Water Flow // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 3. P. 5–12. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-3-5-12.
10. *Kokhanenko V.N., Burtseva O.A., Evtushenko S.I., Kondratenko A.I., Kelekhsaev D.B.* Two-Dimensional in Plan Radial Flow (NonPressure Potential Source) // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 4. P. 74–78. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-4-74-78.
11. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа [Текст] / Л.Г. Лойцянский. — М.: Дрофа, 2003. — 840 с.
12. *Гиргидов А.Д.* Механика жидкости и газа (гидравлика) [Текст]: учебник / А.Д. Гиргидов. — М.: Инфра-М, 2014. — 704 с.
13. *Кудинов А.А.* Гидрогазодинамика [Текст]: учеб. пособие / А.А. Кудинов. — М.: Инфра-М, 2013. — 336 с.
14. Справочник по математике для научных работников и инженеров [Текст] / под общ. ред. Г. Корн, Т. Корн. — М.: Наука, 1970. — 720 с.

References

1. Emtsev B.T. *Dvuhmernye burnye potoki* [2D stormy streams]. Moscow: Energiya Publ., 1967. 212 p.
2. Kohanenko V.N., Volosuhin Ya.V. *Modelirovanie burnyh dvuhmernyh v plane vodnyh potokov* [Modeling of stormy two-dimensional in terms of water flows]. Rostov-on-Don: Yuzhnii federal'niy universitet Publ., 2013. 180 p.
3. Kohanenko V.N. *Modelirovanie odnomernyh i dvuhmernyh otkrytyh vodnyh potokov* [Modeling of one-dimensional and two-dimensional open water flows]. Rostov-on-Don: YuFU Publ., 2007. 168 p.
4. *Spravochnik po gidravlike* [Handbook on hydraulics]. Kiev: Vishcha shkola Publ., 1984. 343 p.

5. Vysockij L.I. Sovershenstvovanie metodov gidravlicheskih raschetov vodopropusknyh i ochistnyh sooruzhenij [Improvement of methods of hydraulic calculations of culverts and treatment facilities]. *Saratovskij gosudarstvennyi tekhnicheskiy universitet* [Saratov State Technical University]. Saratov, 1994. 94 p.
6. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Two-dimensional motion equations in water flow zone // (2019) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 698(6), 066026. DOI: 10.1088/1757-899X/698/6/066026.
7. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. A System of Equations for Potential Two-Dimensional In-Plane Water Courses and Widening the Spectrum of Its Analytical Solutions // (2019) AIP Conference Proceedings 2188, 050017. DOI: 10.1063/1.5138444.
8. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Solution of equation of extreme streamline with free flowing of a torrential stream behind rectangular pipe // (2020) IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering 775 (1), 012134. DOI: 10.1088/1757-899X/775/1/012134.
9. Kokhanenko V.N., Kelekhsaev D.B., Kondratenko A.I., Evtushenko S.I. Solution of Equations of Motion of Two-Dimensional Water Flow // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 3. P. 5–12. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-3-5-12.
10. Kokhanenko V.N., Burtseva O.A., Evtushenko S.I., Kondratenko A.I., Kelekhsaev D.B. Two-Dimensional in Plan Radial Flow (NonPressure Potential Source) // Construction and Architecture. 2019. Vol. 7, Issue 4. P. 74–78. DOI: 10.29039/2308-0191-2019-7-4-74-78.
11. Lojtsyanskij L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of liquid and gas]. Moscow: Drofa Publ., 2003. 840 p.
12. Girgidov A.D. *Mekhanika zhidkosti i gaza (gidravlika)* [Mechanics of liquid and gas (hydraulics)]. Moscow: Infra-M Publ., 2014. 704 p.
13. Kudinov A.A. *Gidrogazodinamika* [Hydrogasdynamics]. Moscow: Infra-M Publ., 2013. 336 p.
14. *Spravochnik po matematike dlya nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of mathematics for scientists and engineers]. Moscow: Nauka Publ., 1970. 720 p.