Construction and Architecture (2020) Vol. 8. Issue 3 (28): 51–57
При цитировании этой статьи ссылка на DOI обязательна DOI: 10.29039/2308-0191-2020-8-3-51-57

Алгоритмизация многокритериальных процессов проектирования энергетических и гидроэнергетических сооружений

УДК 004, 620.9

Куликов В.Г.
Канд. техн. наук, доцент кафедры «Энергетических и гидроэнергетических сооружений», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет “МЭИ”» (г. Москва); доцент кафедры «Информационные системы, технологии и автоматизация в строительстве», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет» (г. Москва); e-mail: kulikov-miit@mail.ru

Хохлов В.А.
Д-р техн. наук, заведующий кафедрой «Энергетических и гидроэнергетических сооружений», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет “МЭИ”» (г. Москва); e-mail: KhokhlovVA@mpei.ru

Титова Ж.О.
Д-р техн. наук, профессор кафедры Гидромеханики и гидравлических машин, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет “МЭИ”» (г. Москва); e-mail: TitovaZO@mpei.ru

Галонен О.Ю.
Канд. техн. наук, доцент кафедры «Энергетических и гидроэнергетических сооружений», ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет “МЭИ”» (г. Москва); e-mail: GalonenOY@mpei.ru

Статья получена: 10.08.2020. Рассмотрена: 15.08.2020. Одобрена: 04.09.2020. Опубликована онлайн: 30.09.2020. ©РИОР

Аннотация. В работе рассмотрены аспекты развития алгоритмов оптимизации сложных систем. Предложены принципы построения процедур для регулировки параметров вариативных градиентных алгоритмов оптимизации. В любом итерационном алгоритме присутствуют параметры, требующие их регулировки. Для управления и регулировки параметрами сформированы критерии, определяющие качество регулировок. Задача определения наилучшего значения параметров регулировки принадлежит аналогичному классу, что и исходная задача

ALGORITHMIZATION OF MULTICRITERIA DESIGN PROCESSES FOR POWER AND HYDROPOWER FACILITIES

Kulikov V.G.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Energy and Hydropower Facilities, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”; Associate Professor, Department of Information Systems, Technologies and Automation in Construction, State University of Civil Engineering (National Research University), Moscow; e-mail: kulikov-miit@mail.ru
Khokhlov V.A.
Doctor of Technical Sciences, Head of the Department of Energy and Hydropower Facilities, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow; e-mail: KhokhlovVA@mpei.ru
Titova Zh.O.
Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Hydromechanics and Hydraulic Machines, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow; e-mail: TitovaZO@mpei.ru
Galonen O.Yu.
Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Energy and Hydropower Facilities, National Research University “Moscow Power Engineering Institute”, Moscow; e-mail: GalonenOY@mpei.ru

Manuscript received: 10.08.2020. **Revised**: 15.08.2020. **Accepted**: 04.09.2020. **Published online:** 30.09.2020. ©RIOR

Abstract. The paper considers aspects of the development of algorithms for optimizing complex systems. The principles of constructing procedures for adjusting the parameters of variable gradient optimization algorithms are proposed. In any iterative algorithm, there are parameters that require their adjustment. To control and adjust parameters, — criteria are formed that determine the quality of adjustments. The problem of determining the best value of adjustment parameters belongs to the same class as the original optimization problem. During the operation of algorithms, their parameters are adapted to the original values. The paper provides recommendations for software implementation of probabilistic algorithms and construction of computational procedures for probabilistic computational experiments based on them.

Keywords: algorithm, hydraulic engineering, gradient algorithms, regulation, algorithm convergence, step multipliers, convex functions, convex analysis.

оптимизации. В процессе работы алгоритмов по параметрам происходит их приспосабливание к исходным значениям. В работе даны рекомендации по программной реализации вероятностных алгоритмов и построению вычислительных процедур вероятностных вычислительных экспериментов на их основе.

Ключевые слова: алгоритм, гидротехническое строительство, градиентные алгоритмы, регулирование, сходимость алгоритма, шаговые множители, выпуклые функции, выпуклый анализ.

Адекватное моделирование энергетических и гидроэнергетических сооружений как сложных систем предполагает учет их нелинейной, вероятностной структуры. Формализация многокритериальной вероятностной структуры может быть учтена мерой ее неопределенности и представлена вероятностными зависимостями моделируемой системы.

Разработанный алгоритм можно классифицировать как непосредственный метод оптимизации вероятностных систем. Предлагаемый алгоритм не требует перевода вероятностной задачи к детерминированному эквиваленту.

Решена задача вероятностного программирования при неполной информации о функции цели, имеющихся ограничениях и их комбинациях.

В разработанном алгоритме вместо точных значений градиентов использованы случайные направления вероятностных градиентов как вероятностные оценки значений их векторов.

Минимизация выпуклой функции $f(x)$ формализована выражением (1):

$$f(x) \to \min, x \in X, \tag{1}$$

где X — выпуклое множество в евклидовом пространстве R^n.

Условие 1. Если функцию $f(x)$ можно представить следующим образом:

$$f(x) = M\varphi(x,\omega) = \int \varphi(x,\omega) P(d\omega) \tag{2}$$

и она выпукла по x, то для дифференциала этой выпуклой функции будет выполняться следствие (3):

$$\partial f(x) = \int \partial\varphi(x,\omega) P(d\omega). \tag{3}$$

Условие 2. Если это истина как вариант, то тогда $\partial\varphi(x, \omega)$ можно представить множеством векторов, являющихся вероятностными оценками обобщенных значений градиентов функции $f(x)$.

Решением представленных условий задачи алгоритмизации энергетических и гидроэнергетических сооружений как сложных систем будем считать правило построения последовательности точек $\{x^s\}$ принадлежащих множеству $X \in R^n$.

Рассмотрим множество начальных решений таких, что $X^* \in X$. Алгоритм многокритериальных процессов проектирования энергетических и гидроэнергетических сооружений должен сходиться, если будет выполняться условие:

$$\lim_{S\to\infty} d(x^S, X^*) = 0, \text{ где } d(x^S, X^*) = \inf_{x\in X} |x^S - x|. \tag{4}$$

Из (4) при рассмотрении задач линейного программирования следует, что:

$$\min f(x), \quad x \in X \in R^n, \tag{5.1}$$

тогда решению задачи будет соответствовать следующее правило:

$$x^{(s+1)} = x^s + \theta_s \cdot (x^0, ..., x^s), s = 0, 1, ..., \tag{5.2}$$

в частности, решающее и задачу 5.1.

Множеством X^* может быть представлено множество решений задачи (5.1) либо множество необходимых условий экстремумов этой задачи.

В таком случае условиями сходимости предлагаемого алгоритма может являться утверждение о выполнении необходимых условий экстремумов во всех предельных точках последовательности $\{x^s\}$.

Формализуем условия, выполнение которых должно приводить к сходимости предлагаемого алгоритма.

Предположим, что последовательность $\{x^s\}$ и множество решений $x \in X \in R^n$ таковы, что выполняются следующие условия:

1) $\{x^s\} \in X$, где X компактное подмножество R^n;
2) W: $X \to R$ — непрерывная функция;
3) если последовательность $\{x^s\}$ сходится в точке x', такой, что $d(x', X^*) > 0$, то для любого

$\xi > 0$ существует подмножество последовательности индексов $\{i_k\}$, у которой $W(x^\tau) \le$ $\le W(x') + \xi$ для $l_k \le \tau \le i_k$ и $\lim_{x\to\infty} W\left(x^{ik}\right) = W^- < W\left(x'\right)$;

4) $\left(W^-, W\left(x'\right)\right) \setminus W\left(X^*\right) = \varnothing$, т.е. открытый интервал $W^-, W\left(x'\right)$ не содержится на множестве $W\left(X^*\right) \overset{\Delta}{=} \left\{W\left(x^*\right) : x^* \in X^*\right\}$;

5) если подмножество последовательности $\{x^{sk}\}$ сходится в точке x^* такой, что $d(x^*, X^*) = 0$, то

$$\left(W\left(x^{sk+1}\right) - W\left(x^{sk}\right)\right) + {}^{\Delta}\max\left\{0, W\left(x^{sk+1}\right) - -W\left(x^{sk}\right)\right\} \to 0 \qquad (6)$$

при $k \to \infty$.

При функционировании энергетических и гидроэнергетических сооружений используются различные ресурсы. При этом важным является умение оптимального управления ими в условиях неопределенностей.

Обобщим в рамках данной статьи это понятие одной переменной и обозначим задачу выбора определенного ресурса через x. Предположим, что спрос на ресурс задается случайной величиной θ. Тогда, если спрос оказывается больше чем запас, т.е. $x < \theta$, назначим штраф, равный: $b \cdot (\theta - x)$. А если $x > \theta$, то штраф будет определяться как $a \cdot (x - \theta)$. В обоих случаях a и b — положительные значения штрафов.

Представим целевую функцию:

$$f\left(x\right) = M \max\left\{a \cdot \left(x - \theta\right), b \cdot \left(\theta - x\right)\right\} \qquad (7)$$

и случайную функцию

$$\varepsilon\left(x\right) = \begin{cases} a, \text{ если } x \ge \theta, \\ b, \text{ если } x < \theta \end{cases} \qquad (8)$$

представим в виде вероятностного градиента.

Представим неизвестную точку минимума выпуклой функции $f(x)$ на множестве X рекуррентной последовательностью

$$x^{s+1} = \pi_X \cdot (x^s - \rho_s \cdot \varepsilon^s),\ s = 0, 1, \dots \infty. \qquad (9)$$

где s — номер итерации алгоритма; X — выпуклое замкнутое множество в R^n; π_X — операция проецирования на множество X; ε^s — вероятностный градиент, условное математическое ожидание M_s этого вектора относительно «σ-алгебры F_s», задаваемой случайными векторами (x^0, ε^0, $x1$, ε^1, ... x^s), которое удовлетворяет условию:

$$M_s \varepsilon^s \in \partial f(x^s) + b^s, \qquad (10)$$

где ρ_s — последовательность случайных величин, шаговые множители;

b^s — последовательность случайных векторов.

В качестве шагов приращений ρ_s выберем заранее заданную последовательность{ak}, удовлетворяющую условиям:

$$\sum\nolimits_0^\infty a_k = \infty,\ a_k > 0,\ k = 0, 1, \dots\ . \qquad (11)$$

Запланируем путь минимизации выпуклой негладкой функции $f(x)$ на выпуклом компактном подмножестве X пространства R^n. У функции $f(x)$ известны стохастические градиенты. Пусть все используемые случайные величины определены на вероятностном пространстве (Ω, A, P). Тогда алгоритм должен порождать последовательности случайных направлений d^s и точки $x^n \in R^n$ ($s = 0, 1, \dots$) на основе следующих соотношений:

$$d^n = \frac{\varepsilon^s + i_s \cdot \gamma_s \cdot d^{s-1}}{\left(1 + \gamma_s\right)}; \qquad (12)$$

$$x^{s+1} = \begin{cases} \pi_X \cdot \left(x^s - \rho_s \cdot \left(1 + \gamma_s\right) \cdot d^s\right), \\ \text{если } \rho_s \cdot \left(1 + \gamma_s\right) \cdot \left|d^s\right| \le t \\ \pi_X \cdot \left(x^s - t \cdot \dfrac{d^s}{\left|d^s\right|}\right), \\ \text{если } \rho_s \cdot \left(1 + \gamma_s\right) \cdot \left|d^s\right| > t, \end{cases} \qquad (13)$$

где ε^s — вероятностный градиент, т.е. $M\left[\varepsilon^s \middle| F_s\right] \in$ $\in \partial f\left(x^s\right)$, σ — алгебра F_s порождена случайными величинами (x^0, ..., x^s, ε^0, ..., ε^{s-1}); ρ_s — положительный шаговый множитель; γ_s — положительный коэффициент усреднения; $i_s \in \{0, 1\}$ — коэффициент восстановления; $t_s \in \{0; +\infty\}$ — ограничивающая константа.

В начальной точке $x \in X$ положим $d^{-1} = 0$. Тогда в соответствии с (12) получается, что направление d^s является выпуклой комбинацией нулевого вектора и предыдущих вероятностных градиентов ξ^i ($i = 0, \dots, s$).

Коэффициент восстановления i_s установим следующим образом:

$$i_s \in \{0,1\}, \text{ если } |\varepsilon^{s-1}| \le \sigma$$
$$i_s = 0, \text{ если } \xi^{s-1} > \sigma, \tag{14}$$

где i_s — фиксированная пороговая величина.

Для построения рекуррентных соотношений модификации параметров ρ_s, γ_s допустим, что алгоритм действует в допустимой области X и $t = +\infty$. Для данных x^{s-1}, d^{s-2} и $\lambda \ge 0$ рассмотрим функцию, характеризующую качество выбранных параметров ρ и γ.

$$\varphi_s(\rho,\gamma) = f\left(x^s \cdot (\rho, \gamma, \varepsilon^{s-1})\right) - f\left(x^{s-1}\right) + \\ +\frac{1}{2}\cdot\lambda\cdot\left|x^s\cdot(\rho,\gamma,\varepsilon^{s-1}) - x^{s-1}\right|^2, \tag{15}$$

где $x^s\cdot(\rho,\gamma,\varepsilon^{s-1}) = x^s - \rho\cdot(\varepsilon^{s-1} + i_{s-1}\cdot\gamma\cdot d^{s-2})$ определяются соотношениями (12, 13). Величины ρ_{s-1} и γ_{s-1} необходимо выбрать из условия минимальности функции $\Phi_s(\rho,\gamma) = E_{(s-1)}\,\varphi_s(\rho,\gamma)$.

Найдем значение дифференциала функции $\varphi_s(\rho,\gamma)$ в точке ρ_{s-1} и γ_{s-1}, преобразовав ее к виду:

$$\partial\varphi_s(\rho_{s-1},\gamma_{s-1}) = \left\{(\widehat{u},\widehat{c}) : \widehat{u} = \frac{1}{\rho_{s-1}}\left[\langle g^s, \Delta x^s\rangle + \right.\right. \\ \left.\left. +\lambda\cdot|\Delta x^s|^2\right]\right\} \tag{16}$$

$$\partial\varphi_s(\rho_{s-1},\gamma_{s-1}) = \left\{(\widehat{u},\widehat{c}) : \widehat{u} = \frac{1}{\rho_{s-1}}\left[\langle g^s, \Delta x^s\rangle + \lambda\cdot|\Delta x^s|^2\right]\right\}$$
$$\widehat{c} = \frac{\rho_{s-1}\cdot i_{s-1}}{\rho_{s-1}\cdot(1+\gamma_{s-1})}\cdot\left[\langle g^s, \Delta x^{s-1}\rangle + \lambda\cdot\langle \Delta x^s, \Delta x^{s-1}\rangle\right], \tag{17}$$
$$g^s \in \partial f(x^s),$$

где $\Delta x^s = x^s - x^{(s-1)}$.

Принимая во внимание предыдущие рассуждения такие, что:

$$u_s = \langle \varepsilon^s, \Delta x^s\rangle + \lambda\cdot|\Delta x^s|^2, \tag{18}$$

$$c_s = i_{s-1}\cdot\left(\langle \varepsilon^s, \Delta x^{s-1}\rangle + \langle \Delta x^s, \Delta x^{s-1}\rangle\right), \tag{19}$$

получим

$$M_s = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\rho_{s-1}}\cdot u_s \\ \dfrac{\rho_{s-1}}{\rho_{s-2}\cdot(1+\gamma_{s-2})}\cdot c_s \end{pmatrix} \in \partial\Phi_s(\rho_{s-1},\gamma_{s-1}). \tag{20}$$

Таким образом вектор (u_s, c_s) можно интерпретировать как вероятностный градиент функции Φ в точке $(\rho_{(s-1)}, \gamma_{(s-1)})$ с точностью до положительных множителей.

Так мы обосновываем использование вектора (u_s, c_s) для построения рекуррентных соотношений вычисления шагового множителя $\rho_0 > 0$.

$$\rho_s = \min\left\{\rho^-, \rho_{s-1} e^{\{\min(\eta - \alpha\cdot u_s - j_s\cdot\delta\cdot\rho_{s-1})\}}\right\}, \tag{21}$$

где $\rho^- > 0$, $\eta > 0$, $\alpha > 0$, $\lambda \ge 0$, $\delta > 0$ — фиксированные параметры, а коэффициент j_s определяется следующим образом:

$$j_s \in \{0,1\}, \text{ если } |\Delta x^s| \ge \Delta_{\min}; \tag{22}$$

$$j_s = 1, \text{ если } |\Delta x^s| < \Delta_{\min}, \tag{23}$$

где $\Delta_{\min}$ — малая положительная величина.

Выражение для вычисления коэффициентов усреднения γ_{s1} представим следующим образом:

$$\begin{cases} \gamma_0 = \gamma_1 > 0 \\ \gamma_s = \min\left\{\gamma^-, \gamma_{s-1} e^{\{-\beta\cdot\vartheta_s - j_s\cdot\aleph\cdot\gamma_{s-1}\}}\right\} \end{cases}, \tag{24}$$

где $\gamma^- > 0$, $\aleph > 0$.

В (23, 24) члены $(j_s \cdot \delta \cdot \rho_{(s-1)})$ и $(j_s \cdot \aleph \cdot \gamma_{(s-1)})$ увеличивают скорость убывания коэффициентов (ρ_s, γ_s) в случае, если величины $u_{(s)}$ и ϑ_s близки к нулю.

Таким образом обоснованы следующие посылки по отношении к параметрам разрабатываемого алгоритма и функции $f(x)$.

Условие на регулирующий коэффициент λ и константу выпуклости функции — ν:

$$\lambda + \nu > 0, \tag{25}$$

где

$$\nu = \sup\left\{\mu : f(y) \ge f(x) + \langle g, y - x\rangle + \mu\cdot|y - x|^2\right\} \tag{26}$$

для всех x, $y \in X$ и всех $g \in \partial f(x)$.

Из (25) следует, что в случае сильной выпуклости целевой функции регулирующий коэффициент λ в (15) можно принять равным нулю.

Существуют константы q_0 и Q такие, что

$$M_s e^{\langle z, r^s\rangle < 0}, \quad s = 0, 1, \ldots \tag{27}$$

Для любого $z \in R^n$ такого, что $|z| \le q_0$, где

$$r^s = \varepsilon^s - M_s \cdot \varepsilon^s. \quad (28)$$

Условие (27) связано с экспоненциальной формой соотношений (21, 23). Условие (27) выполняется как для ограниченных, так и для неограниченных распределений.

Задачи с вероятностными оценками градиентов целевых функций обычно проявляются при минимизации функций следующего вида:

$$f(x) = M \cdot \varphi(x,\omega) = \int_{\omega\in'\Omega}^{\infty} \varphi(x,\omega) \cdot P(d\omega). \quad (29)$$

Так как при любых общих предположениях обобщенный дифференциал функции $f(x)$ вычисляется по следующей формуле:

$$\partial f(x) = \int_{\omega\in'\Omega}^{\infty} \partial_x \varphi(x,\omega) \cdot P(d\omega), \quad (30)$$

то $\partial_x\varphi(x, \omega)$ — это множество векторов, являющихся вероятностными оценками градиентов функции $f(x)$.

Сформулируем задачу оптимизации, решаемую разработанным алгоритмом с учетом предыдущих положений. Пусть даны n точек $y_I(i = 1, \ldots, n)$ в двумерном евклидовом пространстве R^2, и требуется найти точку $x \in R^2$ такую, чтобы сумма расстояний до всех точек y_I $(i = 1, \ldots, n)$ была минимальной. В обобщенной постановке будем считать, что каждая точка y_I $(i = 1, \ldots, n)$ является случайной величиной, задаваемой некоторой вероятностной мерой $\theta_i(y)$ на R^2.

Решение состоит в нахождении такой точки $x \in R^2$, которая будет минимизировать взвешенную сумму математических ожиданий расстояний от точки x до точек $y_I(i = 1, \ldots, n)$:

$$\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \iint_{R2} |x - y| \cdot \theta(dy) \to \min. \quad (31)$$

Если случайные величины $y_I(i = 1, \ldots, n)$ имеют плотности распределений $\theta_I(i = 1, \ldots, n)$, то при определенных условиях, накладываемых на функцию $G(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \cdot \theta_i(x)$, функция $\Psi(x)$ является строго выпуклой и дважды дифференцируемой.

Описание разработанного алгоритма

Обозначим через I единичную матрицу.

Установим в начале счета $s = 0$, зададим x^0, ρ_0, $P = n^{-1} \cdot I$.

Шаг 1. Вычисление вероятностного градиента ξ^s.

Шаг 2. Если $s = 0$, перейти на шаг 10.

Шаг 3. Усреднение нормы сдвига:

$$\Delta x^s = x^s - x^{s-1}, \; G_s = G_{s-1} + \left(\left|\Delta x^s\right| - G_{s-1}\right) \cdot D.$$

В начале счета $G_0 = 0$.

Шаг 4. Проверка окончания счета:

Если $G_s < G^*$ или $s > s^*$, то закончить счет, в противном случае перейти к следующему шагу.

Шаг 5. Вычисление скалярного произведения T_s:

$$T_s = -\left\langle \xi^s, \Delta x^s \right\rangle.$$

Шаг 6. Усреднение модуля T_s:

$$z_s = z_{s-1} + \left(\left|T_s\right| - z_{s-1}\right) \cdot D.$$

В начале счета $z_0 = 0$.

Шаг 7. Регулировка шага ρ_s:

$$\rho_s = \rho_{s-1} \cdot R^{\frac{T_s}{z_s}} = \begin{cases} 1, \text{ если } T_s > 0 \\ U, \text{ если } T_s \le 0 \end{cases}.$$

Шаг 8. Проверка величины изменения шага ρ_s:

$$\rho_s = \begin{cases} \rho_{s-1} \cdot 3, \text{ если } \rho_s \cdot \rho_{s-1}^{-1} > 3, \\ \dfrac{\rho_s}{4}, \text{ если } \rho_s \cdot \rho_{s-1}^{-1} < 4^{-1}, \\ \rho_s \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Шаг 9. Вычисление весов P_s:

$$P^s = \begin{bmatrix} p_1(s) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & p_2(s) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & p_n(s) \end{bmatrix},$$

$$P_i(s) = \alpha \cdot p_i(s-1) + \lambda_i(s) \cdot (1-\alpha),$$

$$\lambda_i(s) = \begin{cases} 0, \text{ если } \left(x_i^{s-1} - x_i^s\right) \cdot \varepsilon_i^s \le 0, \\ \dfrac{1}{m}, \text{ если } \left(x_i^{s-1} - x_i^s\right) \cdot \varepsilon_i^s > 0, \\ \dfrac{1}{n} \text{ в остальных случаях,} \end{cases}$$

где m — количество компонент, для которых $\left(x_i^{s-1} - x_i^s\right) \cdot \varepsilon_i^s > 0$.

Шаг 10. Нахождение следующего приближения:

$$x^{s+1} = x^s - \rho_s \cdot P^s \cdot \varepsilon^s.$$

Шаг 11. Проецирование на допустимую область:

$$x^{s+1} = \pi_x \cdot \left(x^{s+1}\right).$$

Шаг 12. Перейти к шагу 1, увеличив s на единицу.

В представленном алгоритме реализованы два критерия останова: первый — по количеству итераций, второй — по величине среднего сдвига. Когда величина сдвига становится меньше пороговой величины G^*, алгоритм заканчивает работу (шаги 3, 4).

Регулировка шага приращений предусматривает следующие моменты. Величина T_s в показателе степени R нормируется на некоторую величину модуля T_s. Поэтому, если, например, $R = 2$, то шаг $R = 2$ должен изменяться (увеличиваться или уменьшаться) за счет множителя $R^{Ts/Zs}$ в среднем в два раза.

Вместо параметра уменьшения шага δ использовано дополнительное уменьшение шага при помощи коэффициента U, $0 < U \le 1$.

Дополнительное уменьшение происходит только при условии, что:

$$T_s = -\left\langle \varepsilon^s, \Delta x^s \right\rangle \le 0.$$

Так как T_s/Z_s в показателе R — некоторая случайная величина, то шаг ρ_s может и увеличиваться и уменьшаться в очень большое количество раз (шаг 7). Для того чтобы последующий шаг незначительно отличался от предыдущего, установлены пороговые коэффициенты уменьшения и увеличения шагового множителя (шаг 8).

Весовые коэффициенты $p_1(s)$, ... $p_n(s)$ (шаг 9) остаются положительными, причем $\sum_{i=1}^{n} p_i(s) = 1$ для $s = 0,1, ...$.

Формулы для модификации весов $p_i(s)$ имеют следующий смысл. Если по какой-либо компоненте сдвиг происходит в одном направлении, то соответствующий вес у этой компоненты увеличивается, в противном случае — уменьшается.

Операция проецирования (шаг 11) равносильна решению задачи нелинейного программирования. Если $X = \{x: A \cdot x \le b\}$ (A — матрица, b — вектор), то осуществление операции проектирования сводится к задаче квадратичного программирования.

Рекомендации по выбору параметров алгоритма.

Величина среднего изменения шага R ($1 < R < 3$) выбирается равной двум.

Изначально величина начального шага ρ_0 несущественно влияет на скорость сходимости алгоритма. Но при наличии информации начальное значение можно устанавливать следующим образом:

$$\frac{\left|x^0 - x^*\right|}{\varepsilon^0},\ \text{где } x^* \text{ — точка экстремума.}$$

Параметр k определяет коэффициент усреднения $d = \frac{1}{k}$ в формулах усреднения (шаги 3, 6). Рекомендуем k выбирать в интервале $4 \le k \le 5$, когда в алгоритме используются стохастические оценки градиентов целевой функции, и $k = 1$ в случае, если градиенты заданы точно.

Параметр U — дополнительный коэффициент уменьшения шага — выбирается в интервале $0{,}5 \le U \le 1$.

Если информация о градиентах носит вероятностный характер, то U выбирается в интервале $0{,}8 \le U \le 1$.

Если градиенты заданы точно, то $U = 0{,}6$. Заметим, что при $k > 1$ коэффициент U может быть равным 1, так как шаг быстро убывает и без дополнительного уменьшения.

Величина среднего сдвига G_* в критерии останова устанавливается порядка требуемой точности решения по компонентам x.

Параметр s_* позволяет закончить работу после некоторого заданного заранее количества итераций алгоритма.

Параметр α ($0 < \alpha < 1$) (шаг 9) рекомендуем выбирать равным 0,5.

Литература

1. *Волосухин В.А.* Автоматизация расчетов стержневых систем гидротехнического строительства [Текст] / В.А. Волосухин, С.И. Евтушенко. — М.: АСВ, 2007.
2. *Подиновский В.В.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач [Текст] / В.В. Подиновский, В.Д. Ногин. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 256 с.
3. *Гришин М.М.* Гидротехнические сооружения [Текст] / М.М. Гришин. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Изд-во литературы по строительству и архитектуре, 2003. — 950 с.
4. *French S., Xu D.L.* Comparison study of multi-attribute decision-analytic software // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. 2005. No. 13. Pp. 26—80.
5. *Урясьев С.П.* Адаптивные алгоритмы стохастической оптимизации и теории игр [Текст] / С.П. Урясьев. — М.: Наука, 1991.
6. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа [Текст] / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. — М.: Наука, 1981.
7. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу [Текст] / Л. Ниренберг. — М.: Мир, 1977
8. *Моисеев Н.Н.* Элементы теории оптимальных систем [Текст] / Н.Н. Моисеев. — М.: Наука, 1975.
9. *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями [Текст] / Дж. Варга. — М.: Наука, 1977.
10. *Бурков В.Н.* Основы математической теории активных систем [Текст] / В.Н. Бурков. — М.: Наука, 1977.

References

1. Volosuhin V.A., Evtushenko S.I. *Avtomatizaciya raschetov sterzhnevyh sistem gidrotekhnicheskogo stroitel'stva* [Automation of calculations for rod systems in hydraulic engineering]. Moscow: ASV Publ., 2007.
2. Podinovskij V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nyh zadach* [Pareto-optimal solutions to multicriteria problems]. Moscow: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoj literatury Publ., 1982. 256 p.
3. Grishin, M.M. *Gidrotekhnicheskie sooruzheniya* [Hydraulic structures]. Moscow: literatury po stroitel'stvu i arhitekture Publ. Moscow, 2003. 950 p.
4. French, S. and D.L. Xu. Comparison study of multi-attribute decision-analytic software // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis 13, 2005: 26—80.
5. Uryas'ev S.P. *Adaptivnye algoritmy stohasticheskoj optimizacii i teorii igr* [Adaptive algorithms for stochastic optimization and game theory]. Moscow: Nauka Publ., 1991.
6. Kolmogorov A.N., Fomin S.V. *Elementy teorii funkcij i funkcional'nogo analiza* [Elements of the theory of functions and functional analysis]. Moscow: Nauka Publ., 1981.
7. Nirenberg L. *Lekcii po nelinejnomu funkcional'nomu analizu* [Lectures on nonlinear functional analysis]. Moscow: Mir Publ., 1977
8. Moiseev N.N. *Elementy teorii optimal'nyh system* [Elements of the theory of optimal systems]. Moscow: Nauka Publ.1975.
9. Varga Dzh. *Optimal'noe upravlenie differencial'nymi i funkcional'nymi uravneniyami* [Optimal control of differential and functional equations]. Moscow: Nauka Publ., 1977.
10. Burkov V.N. *Osnovy matematicheskoj teorii aktivnyh system* [Foundations of the mathematical theory of active systems]. Moscow: Nauka Publ., 1977.